

財團法人大學入學考試中心基金會
114學年度學科能力測驗試題

數學A考科

請於考試開始鈴響起，在答題卷簽名欄位以正楷簽全名

—作答注意事項—

考試時間：100分鐘

作答方式：

- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正帶（液）。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響成績。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若答案格式是 $\frac{\textcircled{18-1}}{\textcircled{18-2}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生必須分別在答題卷上

的第 18-1 列的 $\frac{3}{\square}$ 與第 18-2 列的 $\frac{\square}{8}$ 劃記，如：

18-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>				
18-2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若答案格式是 $\frac{\textcircled{19-1}\textcircled{19-2}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答題卷的第 19-1 列

的 $\frac{\square}{\square}$ 與第 19-2 列的 $\frac{7}{\square}$ 劃記，如：

19-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>						
19-2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>					

選擇（填）題計分方式：

- 單選題：每題有 n 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有 n 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題 $\frac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
- 選填題每題有 n 個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

※試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

第壹部分、選擇（填）題（占85分）

一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題 5 分。

1. 不透明袋中有藍、綠色球各若干顆，且球上皆有 1 或 2 的編號，其顆數如下表，例如標有 1 號的藍色球有 2 顆。

	藍	綠
1 號	2	4
2 號	3	k

從此袋中隨機抽取一球（每顆球被抽到的機率相等），若已知抽到藍色球的事件與抽到 1 號球的事件互相獨立，試問 k 值為何？

- (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 5 (5) 6
2. 坐標平面上， $P(a,0)$ 為 x 軸上一點，其中 $a > 0$ 。令 L_1 、 L_2 為通過 P 點，斜率分別為 $-\frac{4}{3}$ 、 $-\frac{3}{2}$ 的直線。已知 L_1 、 L_2 分別與兩坐標軸圍成的兩個直角三角形的面積差為 3，試問 a 值為何？
- (1) $3\sqrt{2}$ (2) 6 (3) $6\sqrt{2}$ (4) 9 (5) $8\sqrt{2}$
3. 某校舉辦音樂會，包含鋼琴表演 5 個、小提琴表演 4 個、歌唱表演 3 個等三類表演共 12 個不同曲目。該校想將同類表演排在一起，且歌唱必須排在鋼琴之後或是小提琴之後。試問這場音樂會可能的曲目排列方式共有幾種？
- (1) $5! \times 4! \times 3!$
(2) $2 \times 5! \times 4! \times 3!$
(3) $3 \times 5! \times 4! \times 3!$
(4) $4 \times 5! \times 4! \times 3!$
(5) $6 \times 5! \times 4! \times 3!$

4. 坐標平面上， x 坐標與 y 坐標均為整數的點稱為格子點。試問在函數圖形 $y = \log_2 x$ 、 x 軸與直線 $x = \frac{61}{2}$ 所圍有界區域的內部(不含邊界)共有多少個格子點？

- (1) 88 (2) 89 (3) 90 (4) 91 (5) 92

5. 設 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 。已知所有滿足 $\sin 2\theta > \sin \theta$ 且 $\cos 2\theta > \cos \theta$ 的 θ 可表為 $a\pi < \theta < b\pi$ ，其中 a, b 為實數，試問 $b - a$ 值為何？

- (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{3}{4}$ (5) 1

6. 坐標空間中有三個彼此互相垂直之向量 $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ 。已知 $\vec{u} - \vec{v} = (2, -1, 0)$ ，且 $\vec{v} - \vec{w} = (-1, 2, 3)$ 。試問由 $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ 所張出的平行六面體之體積為何？

- (1) $2\sqrt{5}$ (2) $5\sqrt{2}$ (3) $2\sqrt{10}$ (4) $4\sqrt{5}$ (5) $4\sqrt{10}$

二、多選題（占 30 分）

說明：第 7 題至第 12 題，每題 5 分。

7. 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $3a_{n+1} = a_n + n$ （對任意正整數 n 都成立）且 $a_1 = 2$ 。令數列 $\langle b_n \rangle$ 滿足

$$b_n = a_n - \frac{n}{2} + \frac{3}{4}。試選出正確的選項。$$

- (1) $a_2 = 2$
(2) $b_2 = \frac{3}{4}$
(3) 數列 $\langle b_n \rangle$ 是公比為 $\frac{2}{3}$ 的等比數列
(4) 對於任意正整數 n ， $3^n a_n$ 皆為正整數
(5) $b_{10} < 10^{-4}$

8. 考慮坐標平面上滿足方程式 $\frac{2^{x^2}}{8} = \frac{4^x}{2^{y^2}}$ 的點 $P(x, y)$ ，試選出正確的選項。
- (1) 當 $x=3$ 時，滿足此方程式的解有相異 2 個
 - (2) 若點 (a, b) 滿足此方程式，則點 $(-a, -b)$ 也滿足此方程式
 - (3) 所有可能的點 $P(x, y)$ 構成的圖形為一個圓
 - (4) 點 $P(x, y)$ 可能在直線 $x + y = 4$ 上
 - (5) 對於所有可能的點 $P(x, y)$ ，其 $x - y$ 的最大值為 $1 + 2\sqrt{2}$
9. 設 b 、 c 為實數。已知二次方程式 $x^2 + bx + c = 0$ 有實根，但二次方程式 $x^2 + (b+2)x + c = 0$ 沒有實根。試選出正確的選項。
- (1) $c < 0$
 - (2) $b < 0$
 - (3) $x^2 + (b+1)x + c = 0$ 有實根
 - (4) $x^2 + (b+2)x - c = 0$ 有實根
 - (5) $x^2 + (b-2)x + c = 0$ 有實根
10. 令 Γ 為坐標平面上 $y = \sin \pi x$ 在 $0 \leq x \leq 3$ 內之函數圖形。一水平直線 $L: y = k$ 與 Γ 相交，其中三交點 $P(x_1, k), Q(x_2, k), R(x_3, k)$ 滿足 $x_1 < x_2 < 1 < x_3$ 。試選出正確的選項。
- (1) $k > 0$
 - (2) L 與 Γ 恰有 3 個交點
 - (3) $x_1 + x_2 < 1$
 - (4) 若 $2\overline{PQ} = \overline{QR}$ ，則 $k = \frac{1}{2}$
 - (5) L 與 Γ 所有交點的 x 坐標之和大於 5

11. 在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=6, \overline{AC}=5, \overline{BC}=4$ 。令 \overline{AB} 中點為 D ， P 為 $\angle ABC$ 之角平分線與 \overline{CD} 之交點，如圖所示。試選出正確的選項。

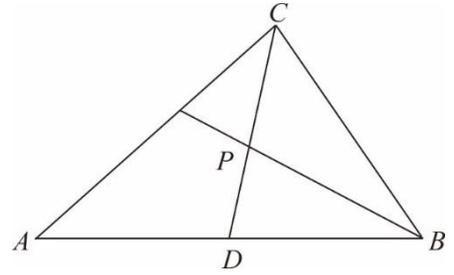
(1) $\overline{CP} = \frac{3}{7}\overline{CD}$

(2) $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{7}\overrightarrow{AC}$

(3) $\cos \angle BAC = \frac{3}{4}$

(4) $\triangle ACP$ 面積為 $\frac{15}{14}\sqrt{7}$

(5) (內積) $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{120}{7}$



12. 某種合金由甲和乙兩種金屬組成，某生想知道其中金屬比例與合金的波長關係。他做實驗測量「甲占比為 $x\%$ 的合金所對應的波長 y (單位：奈米)」，並將得到的 20 筆數據 (x_k, y_k) ， $k=1, \dots, 20$ ，在 xy 平面上標出對應的點，其迴歸直線 (最適直線) 為 $y = 21.3x - 40$ 。

為符合投稿規範，須將報告描述為「乙占比為 $u\%$ 的合金所對應的波長 v (單位：微米)」，他將數據 (x_k, y_k) 轉換為 (u_k, v_k) ， $k=1, \dots, 20$ ，得到在 uv 平面的迴歸直線為 $v = au + b$ 。

已知 1 奈米 = 10^{-9} 公尺，1 微米 = 10^{-6} 公尺。試選出正確的選項。

(1) $u_k = 100 - x_k$ ， $k=1, \dots, 20$

(2) $v_k = 1000y_k$ ， $k=1, \dots, 20$

(3) $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{20}$ 的標準差等於 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{20}$ 的標準差

(4) $b = 2.09$

(5) 某生發現有另一筆數據 (u_{21}, v_{21}) ，且滿足 $v_{21} = au_{21} + b$ ；若將這 21 筆數據 (u_k, v_k) ， $k=1, \dots, 21$ ，在 uv 平面上標出對應的點，則其迴歸直線仍為 $v = au + b$

三、選填題 (占 25 分)

說明：第 13 題至第 17 題，每題 5 分。

13. 已知實係數三次多項式 $f(x)$ 除以 $x+6$ 得商式 $q(x)$ 和餘式 3。若 $q(x)$ 在 $x=-6$ 有最大值 8，

則 $y = f(x)$ 圖形的對稱中心坐標為 (13-1 , 13-2)，(13-3)。

14. 坐標空間中，已知點 A 的坐標為 (a,b,c) ，其中 a,b,c 皆為小於 0 的實數，且知點 A 與三平面 $E_1:4y+3z=2$ 、 $E_2:3y+4z=-5$ 、 $E_3:x+2y+2z=-2$ 的距離都是 6，

則 $a+b+c = \frac{\textcircled{14-1} \textcircled{14-2} \textcircled{14-3}}{\textcircled{14-3}}$ 。

15. 假日市集有個攤位推出「試試手氣，定價 480 元的可愛玩偶最低只要 240 元」。規則為：顧客投擲一枚均勻硬幣至多 5 次，前 3 次連續擲得 3 個正面者則只能以 240 元購得一個玩偶，擲到第 4 次才累積得 3 個正面者則只能以 320 元購得一個，擲到第 5 次才累積得 3 個正面者則只能以 400 元購得一個；5 次投完仍未累積 3 個正面者則只能以 480 元購得一個。參與此遊戲的顧客購得一個玩偶所花金額的期望值為 $\frac{\textcircled{15-1} \textcircled{15-2} \textcircled{15-3}}{\textcircled{15-3}}$ 元。

16. 坐標平面上，設 L_1 、 L_2 為通過點 $(3,1)$ 且斜率分別為 m 、 $-m$ 的兩條直線，其中 m 為一實數。另設 Γ 為圓心在原點的一個圓。已知 Γ 與 L_1 交於相異兩點 A 、 B ，且知

圓心到 L_1 的距離為 1，又 Γ 與 L_2 相切，則弦 \overline{AB} 的長度為 $\frac{\textcircled{16-1} \textcircled{16-2}}{\textcircled{16-3}}$ 。(化為最簡分數)

17. $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB} = \overline{BC} = 3$ ， $\cos \angle ABC = -\frac{1}{8}$ 。在 $\triangle ABC$ 的外接圓上有一點 D 滿足 $\overline{BD} = 4$ ，

$$\text{且 } \overline{AD} \leq \overline{CD}, \text{ 則 } \overline{CD} = \frac{\textcircled{17-1} + \sqrt{\textcircled{17-2}}}{\text{---}} \text{。 (化為最簡根式)}$$

第貳部分、混合題或非選擇題（占 15 分）

說明：本部分共有 1 題組，單選題每題 3 分，非選擇題配分標於題末。限在答題卷標示題號的作答區內作答。
選擇（填）題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

18-20 題為題組

已知 $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ 、 $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$ 皆為坐標平面上以原點 O 為中心，逆時針旋轉一銳角的旋轉矩陣，且滿足 $A^2 = B^3 = \begin{bmatrix} 0 & c \\ 1 & d \end{bmatrix}$ ，其中 c, d 為實數。

設點 $P(1,1)$ 經 A^3 變換後為點 Q ，且點 Q 經 B^4 變換後為點 R 。根據上述，試回答下列問題。

18. 試問 c 之值為何？（單選題，3 分）

- (1) 0 (2) -1 (3) 1 (4) $-\frac{1}{2}$ (5) $\frac{1}{2}$

19. 試求點 Q 的坐標，以及 \overrightarrow{OR} 與向量 $(1,0)$ 的夾角。（非選擇題，6 分）

20. 設 L 為過點 P 且與直線 OQ 平行的直線，點 S 為 L 和直線 OR 的交點，試求 $\angle OSP$ ，並求點 S 的坐標。（非選擇題，6 分）

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為 a ，公比為 $r (r \neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

3. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑)

$\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

4. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，

算術平均數 $\mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$

標準差 $\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1 - \mu_X)^2 + (x_2 - \mu_X)^2 + \dots + (x_n - \mu_X)^2]} = \sqrt{\frac{1}{n}[x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2] - n\mu_X^2}$

5. 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，

相關係數 $r_{X,Y} = \frac{(x_1 - \mu_X)(y_1 - \mu_Y) + (x_2 - \mu_X)(y_2 - \mu_Y) + \dots + (x_n - \mu_X)(y_n - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

迴歸直線 (最適合直線) 方程式 $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$

6. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732, \sqrt{5} \approx 2.236, \sqrt{6} \approx 2.449, \pi \approx 3.142$

7. 對數值： $\log 2 \approx 0.3010, \log 3 \approx 0.4771, \log 5 \approx 0.6990, \log 7 \approx 0.8451$