Комплексные поверхности 8: диффеоморфность К3

Задача 8.1. Пусть M – К3, а $\mathfrak{R}_k \subset H^2(M,\mathbb{Z})$ – множество всех векторов v таких, что $(v,v) = k$, четно. Докажите, что множество предельных точек $\mathbb{P}\mathfrak{R}_k$ есть световой конус $Null(M)$ (множество всех векторов с квадратом 0).

Задача 8.2 (*). Докажите, что группа $O(H^2(M,\mathbb{Z}))$ автоморфизмов решетки когомологий К3 действует транзитивно на множестве $\mathfrak{R}_k$, для каждого k.

Задача 8.3 (*). Докажите, что группа $O(H^2(M,\mathbb{Z}))$ порождена инволюциями.

Задача 8.4. Пусть M – К3. Докажите, что M проективна тогда и только тогда, когда в $H^{1,1}(M,\mathbb{Z})$ найдется класс, квадрат которого положителен.

Задача 8.5. Пусть M есть К3, а L – обильное расслоение, которое порождает $Pic(M)$. Предположим, что $(L,L) = 6$. Докажите, что общее сечение L гладко, а L глобально порождено.

Задача 8.6. Пусть M есть К3, а $\phi: \ M \longrightarrow C$ – сюрьективное, голоморфное отображение на кривую. Докажите, что C есть $\mathbb{C}P^1$.

Задача 8.7. В условиях предыдущей задачи, докажите, что общий слой ϕ есть эллиптическая кривая.

Задача 8.8. Пусть L – обильное расслоение на К3, которое порождает $Pic(M)$. Докажите, что $L \otimes L$ глобально порождено.