5. Топология, лекция 5: Основы общей топологии

5.1. Топологическое пространство

Определение топологического пространства, употребляемое и по сей день, принадлежит Хаусдорфу.

Напомним, что 2^M обозначает множество всех подмножеств в M.

Определение 5.1. Пусть M - множество, а $\mathcal{U} \subset 2^M$ набор подмножеств, называемых **открытыми**. Мы говорим, что $\mathcal{U}$ **задает топологию** на M, если

(i) Любое объединение открытых подмножеств открыто

(ii) Конечное пересечение открытых подмножеств открыто

(iii) M и пустое множество $\emptyset$ открыты.

В такой ситуации M называется **топологическим пространством**.

Задача 5.2. Проверьте, что метрическое пространство, с обычным понятием открытого множества, удовлетворяет этим аксиомам.

Определение 5.3. Замкнутым множеством называется множество, дополнение которого открыто.

Заметим, что вместо аксиом, использующих открытые множества, можно было бы выбрать аксиомы, основанные на замкнутости. Получается весьма похожая система аксиом: (i) “пересечение любого количества замкнутых множеств замкнуто”, (ii) “объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто”, (iii) “M и пустое множество $\emptyset$ замкнуты”.

Определение 5.4. **Окрестностью** подмножества $Z \subset M$ называется любое открытое множество, содержащее Z. **Замыканием** подмножества $Z \subset M$ называется пересечение всех замкнутых подмножеств, содержащих Z.

Задача 5.5. Докажите, что замыкание любого множества замкнуто. Найдите замыкание $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$.

Определение 5.6. Подмножество M называется **всюду плотным**, если замыкание его совпадает с M. Оно называется **нигде не плотным**, если его замыкание не содержит непустых открытых подмножеств M.

Задача 5.7. Приведите пример нигде не плотного, континуального подмножества отрезка (в обычной топологии).

Определение 5.8. Пусть M, N топологическое пространство. Отображение $\phi: M \longrightarrow N$ называется **непрерывным**, если прообраз любого открытого множества открыт.

Определение 5.9. Пределом последовательности $\{x_i\}$ в M называется такая точка $x \in M$, что в любой окрестности x содержатся почти все элементы $\{x_i\}$.

Задача 5.10. Придумайте пример пространства, в котором предел не единственный. Докажите, что образ предела, при непрерывном отображении - всегда предел.

Определение 5.11. Пусть M - топологическое пространство. **Базой топологии** (base of topology) на M называется набор $\mathcal{U} \subset 2^M$ подмножеств M, состоящий из открытых множеств, и такой, что любое открытое подмножество M получено объединением набора элементов $\mathcal{U}$.

Определение 5.12. Пусть $Z \subset M$ – подмножество топологического пространства M. Подмножества вида $U \cap Z$, где U открыто в M, задают топологию на Z (докажите). Эта топология называется **индуцированной с** M.

5.2. Аксиомы Хаусдорфа

В определении топологического пространства, данном Хаусдорфом, требовалось еще одно условие: условие *отделимости*. Впоследствии оказалось, что неотделимые топологические пространства встречаются весьма часто, и это условие стали рассматривать как дополнительную аксиому.

Определение 5.13. Топологическое пространство M называется **отделимым**, или **Хаусдорфовым** (separated, Hausdorff), если любые две точки $x \neq y \in M$ имеют непересекающиеся окрестности $U \ni x, V \ni y$.

Задача 5.14. Докажите, что в хаусдорфовом топологическом пространстве предел последовательности единственен.

В алгебраической геометрии важную роль играет топология Зариского. Пусть R - кольцо, $\mathsf{Spec}(R)$ - множество его простых идеалов, а $f \in R$ – любой элемент. Обозначим за A_f подмножество в $\mathsf{Spec}(R)$, состоящее из всех идеалов, которые не содержат f. Рассмотрим на $\mathsf{Spec}(R)$ топологию, где база открытых множеств состоит из A_f, для всех $f \in R$. Эта топология называется **топологией Зариского**, а $\mathsf{Spec}(R)$ - **спектром** кольца.

Oscar Zariski
(1899 – 1986)

Задача 5.15. Рассмотрим пространство $\mathsf{Spec}(\mathbb{Z})$, с топологией Зариского. Докажите, что оно нехаусдорфово.

В 1920-е годы математики придумали целую линейку аксиом, T_0-T_6, которые называются *аксиомы Хаусдорфа*, и *аксиомы отделимости* (separation axioms). Каждая из них сильнее всех предыдущих (докажите это).

Определение 5.16.

T_0 (Аксиома Колмогорова) Для любых двух точек $x \neq y \in M$, у одной есть окрестность, не содержащая другую точку.

T_1 (Аксиома Фреше) Для любых двух точек $x \neq y \in M$, у x есть окрестность, не содержащая y. Равносильная формулировка: все точки M являются замкнутыми множествами (докажите равносильность).

T_2 (Аксиома Хаусдорфа) У любых двух точек $x \neq y \in M$ есть непересекающиеся окрестности.

$T_{2\frac{1}{2}}$ (аксиома Урысона) У любых двух точек $x \neq y \in M$ есть окрестности, замыкания которых не пересекаются.

T_3 В M выполняется аксиома T_0. К тому же, для любого замкнутого множества $Z \subset M$, и любой точки $x \notin Z$, у Z и x есть непересекающиеся окрестности.

T_4 В M выполняется аксиома T_1. К тому же, любые два непересекающихся замкнутых подмножества M имеют непересекающиеся окрестности.

T_5 В любом подмножестве M, взятом с индуцированной топологией, выполняется аксиома T_4.

T_6 В M выполняется аксиома T_4. К тому же, каждое замкнутое множество можно получить как счетное пересечение открытых.

Кроме этих, существует немало других аксиом отделимости, но они не очень употребительны. Впрочем, аксиомы T_0-T_6 тоже употребляются весьма редко, кроме аксиомы Хаусдорфа T_2.

В любом метрическом пространстве M выполняется T_6 (а значит, и все остальные аксиомы из списка). Действительно, ε-окрестность любого множества открыта (докажите), и каждое замкнутое подмножество метрического пространства получается как пересечение своих ε-окрестностей. Чтобы убедиться, что в M выполняется T_4, возьмем замкнутые, непересекающиеся множества Z_1, Z_2 в M, и для каждой точки $x \in Z_1$ возьмем шар $B_{\frac{r}{3}}(x)$, где $r = d(x, Z_2)$. Объединение всех таких шаров открыто, и не пересекается с окрестностью Z_2, полученной таким же образом.

Задача 5.17. Пусть Z_1, Z_2 - непересекающиеся замкнутые подмножества пространства, где верно T_4. Докажите, что у Z_1, Z_2 есть окрестности, замыкания которых не пересекаются.

Докажем следствие $T_6 \Rightarrow T_5$. Пусть $Z \subset M$ - любое подмножество, а $K, K' \subset Z$ непересекающиеся подмножества, которые замкнуты в Z. Обозначим их замыкания в M за $\bar{K}$, $\bar{K}'$. Легко видеть, что K не пересекается с $\bar{K}'$, а K' не пересекается с $\bar{K}$. Обозначим за K'' пересечение $\bar{K} \cap \bar{K}'$. Тогда K'' получается как пересечение счетного семейства открытых множеств U_i. Возьмем у $K\backslash U_0$, $K'\backslash U_0$ непересекающиеся окрестности V_0, V_0'. Воспользовавшись предыдущей задачей, можно предположить, что замыкания $\bar{V}_0, \bar{V}_0'$ не пересекаются. Применив T_4 к $\bar{V}_0 \cup K\backslash U_1$, $\bar{V}_0' \cup K'\backslash U_1$, получим окрестности V_1, V_1' замкнутых подмножеств $K\backslash U_1$, $K'\backslash U_1$, замыкания которых не пересекаются. Применив индукцию, получим систему открытых множеств $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset ...$, $V_0' \subset V_1' \subset V_2' \subset ...$ которые не пересекаются, причем $V_i \supset K\backslash U_i$ и $V_i' \supset K'\backslash U_i$. Объединение всех V_i содержит K, открыто, и не пересекается с объединением всех V_i', которое содержит K'.

Если пропустить предыдущий абзац, никакой беды в этом не будет, в дальнейшем этот аргумент не используется.

Задача 5.18 (*). Для каждой из аксиом T_i, придумайте примеры пространств, в которых она выполнена, а предыдущая не выполнена.

Задача 5.19. Докажите, что в пространстве $\mathsf{Spec}(R)$ с топологией Зариского выполнена аксиома T_0, а T_1 не выполнена для $\mathsf{Spec}(\mathbb{Z})$.

5.3. Аксиомы счетности

Определение 5.20. Пусть M - топологическое пространство, а $x \in M$ - точка. Набор окрестностей $\{U_\alpha \ni x\}$ называется **базой окрестностей в точке** ("local base"), если каждая окрестность x содержит какой-то из U_α.

Определение 5.21. Топологическое пространство **обладает счетной базой в точке**, если у каждой точки есть счетная база окрестностей. Это условие также называется **первой аксиомой счетности** (first axiom of countability).

Метрическое пространство удовлетворяет этому условию (докажите).

Для пространства M со счетной базой окрестностей в точке, $Z \subset M$ замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит предельные точки всех последовательностей. Доказательство вполне аналогично доказательству этого факта для метрических пространств (докажите). Поэтому для пространств со счетной базой окрестностей в точке, непрерывность можно определять через пределы последовательностей, как это делается для метрических пространств.

Определение 5.22. Топологическое пространство **обладает счетной базой**, если у него есть счетная база открытых множеств. Это условие также называется **второй аксиомой счетности** (second axiom of countability).

По-английски, пространства, удовлетворяющие первой и второй аксиоме счетности, часто называют first-countable, second-countable.

В топологии и алгебраической геометрии, слово "сепарабельность" – синоним отделимости. В анализе бесконечномерных пространств, "сепарабельно" значит "содержит плотное, счетное подмножество". Не перепутайте!

Задача 5.23. Докажите, что пространство со счетной базой в точке содержит плотное, счетное подмножество тогда и только тогда, когда у него есть счетная база.