16. Топология, лекция 16: Накрытия Галуа

16.1. Факторпространства

Определение 16.1. Пусть M – топологическое пространство, а $\sim$ – отношение эквивалентности. Подмножество $U \subset M/\sim$ множества классов $M/\sim$ называется **открытым**, если его прообраз в M открыт. Проверьте, что это определяет топологию на $M/\sim$. Такая топология называется **фактортопологией**, а пространство $M/\sim$ – **факторпространством.**

Определение 16.2. Пусть задано множество M. Легко видеть, что множество биекций $\operatorname{Bij}(M, M)$ из M в M образует группу с операцией композиции. Напомним, что группа G **действует на множестве** M, если задан гомоморфизм из G в группу биекций $\operatorname{Bij}(M, M)$. Иначе говоря, для каждого $g \in G$, $m \in M$, задана точка $g(m)$, при этом $g(g_1(m)) = gg_1(M)$, для любых $g, g_1 \in G$.

Определение 16.3. В такой ситуации, **орбитой** точки $x \in M$ называется множество

$$Gx := \{y \in M \mid y = gx, g \in G\}$$

всех точек, которые можно получить из x действием G.

Определение 16.4. Пусть M – топологическое пространство, а G – группа. Мы говорим, что G **действует на топологическом пространстве** M, или G **непрерывно действует на** M, если G действует на M, причем для любого $g \in G$, отображение $m \longrightarrow gm$ непрерывно.

Замечание 16.5. Аналогичным образом определяется действие группы G на объекте категории $\mathcal{C}$. **Действием группы** на $X \in \mathcal{O}b(\mathcal{C})$ называется отображение $G \longrightarrow \mathcal{M}or(X, X)$ такое, что произведение элементов группы переходит в композицию морфизмов.

Определение 16.6. Пусть G – группа, действующая на топологическом пространстве M. **Факторпространством** по действию группы называется пространство классов эквивалентности $M/\sim$, где $x \sim y$, если x и y лежат в одной орбите G. Также факторпространство называют **пространство орбит действия** G.

Задача 16.7. Пусть M хаусдорфово, а G – группа, непрерывно действующая на M. Всегда ли факторпространство M/G хаусдорфово?

Замечание 16.8. Пусть G - группа, действующая на топологическом пространстве M. Тогда естественная проекция $M \xrightarrow{\pi} M/G$ является открытым отображением. В самом деле, пусть U – открытое множество, а GU – объединение всех точек вида gu, $g \in U$, $u \in U$. Тогда GU – объединение открытых множеств вида gU, и оно открыто. Поскольку $\pi^{-1}(\pi(U)) = GU$, образ $\pi(U)$ открыт в M/G.

16.2. Категория накрытий

Определение 16.9. Пусть M, $\tilde{M}$ – топологические пространства, а $\pi : \tilde{M} \longrightarrow M$ непрерывное отображение. π называется **этальным**, если у каждой точки $\tilde{x} \in \tilde{M}$ есть окрестность $\tilde{U} \ni \tilde{x}$ такая, что

$$\pi\Big|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \longrightarrow \pi(\tilde{U})$$

это гомеоморфизм. Это отображение называется **накрытием**, если у каждой точки $x \in M$, есть окрестность $U \ni x$ такая, что $\pi^{-1}(U)$ гомеоморфно $U \times S$, где S – топологическое пространство с дискретной топологией, а отображение $\pi\Big|_{\pi^{-1}(U)} : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U$ при таком изоморфизме совпадает с проекцией $U \times S \longrightarrow U$. **Базой накрытия** называется M, а его **слоем** над точкой x – прообраз $\pi^{-1}(x)$.

Замечание 16.10. Легко видеть, что любое накрытие этально (проверьте это).

Замечание 16.11. Пусть $U \subset X$ - открытое подмножество, которое не является замкнутым. Отображение вложения $j : U \longrightarrow X$ этально, но не является накрытием (проверьте).

Задача 16.12. Пусть M – связно, а $\pi : \tilde{M} \longrightarrow M$ – накрытие. Докажите, что слой $\pi^{-1}(x)$ равномощен $\pi^{-1}(y)$, для любых $x, y \in M$.

Пример 16.13: Отождествим окружность S^1 с одномерным тором $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Естественная проекция $\mathbb{R} \longrightarrow S^1$ является накрытием (докажите). Проекция $\mathbb{R}^n$ на тор $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ также является накрытием (докажите это).

Определение 16.14. Пусть G – группа, действующая на топологическом пространстве M. Говорится, что действие G **вполне разрывно**, если у каждой точки $x \in M$ есть окрестность U такая, что $U \cap gU = \emptyset$ для любого $g \in G$ такого, что g действует не тождественно в окрестности U.

Утверждение 16.15: Пусть G – группа, вполне разрывно действующая на топологическом пространстве M. Тогда проекция $M \xrightarrow{\pi} M/G$ является накрытием.

Доказательство: Пусть $x \in M$ – любая точка, а $U \ni x$ – окрестность, удовлетворяющая $U \cap gU = \emptyset$ для любого $g \in G$ такого, что $g(x) \neq x$. Поскольку π открыто, $\underline{U} := \pi(U)$ – окрестность $\pi(x)$. Естественная проекция $\pi : U \longrightarrow \underline{U}$ по построению биективна и непрерывна. Поскольку каждое открытое подмножество $\underline{U_1} \subset \underline{U}$ получается как образ открытого подмножества вида GU_1, где $\overline{U_1} \subset U$ (Замечание 16.8), $\pi : U \longrightarrow \underline{U}$ гомеоморфизм. Поэтому проекция $M \xrightarrow{\pi} M/G$ этальна. Поскольку $\pi^{-1}(\underline{U})$ – объединение непересекающихся открытых множеств вида gU, где $g \in G$, эта проекция является накрытием.■

Пример 16.16: Примеры вполне разрывного действия группы на топологическом пространстве приведены выше ($\mathbb{R} \longrightarrow S^1$, $\mathbb{R}^n \longrightarrow T^n$). Подобных примеров можно изобрести немало.

Задача 16.17. Пусть M – группа верхнетреугольных матриц (матриц, у которых на диагонали 1, ниже диагонали 0), а Γ – множество верхнетреугольных матриц с целыми коэффициентами. Докажите, что Γ – группа. Рассмотрим действие Γ на M по формуле $\gamma(m) = \gamma \cdot m$, где $\cdot$ обозначает умножение матриц. Докажите, что это действие вполне разрывно.

Определение 16.18. Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$, $\tilde{M}' \xrightarrow{\pi'} M$ – накрытия M. Непрерывное отображение $\psi : \tilde{M} \longrightarrow \tilde{M}'$ называется **морфизмом накрытий**, если $\psi \circ \pi' = \pi$.

Соотношения наподобие $\psi \circ \pi' = \pi$ часто изображают посредством диаграмм

$$\begin{tikzcd} \tilde{M} \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\pi"] & \tilde{M}' \arrow[d, "\pi'"] \\ & M \end{tikzcd} \qquad (16.2.1)$$

в вершинах которой стоят объекты категории, а стрелочки обозначают морфизмы. Говорится, что эта диаграмма **коммутативна**, если морфизм, полученный композицией стрелочек, идущих из одного объекта в другой, не зависит от выбора пути по стрелочкам.

В частности, диаграмма (16.2.1) коммутативна тогда и только тогда, когда $\psi \circ \pi' = \pi$.

Замечание 16.19. Накрытия пространства M образуют категорию. Объекты этой категории – накрытия M, а морфизмы определены выше. Ассоциативность композиции морфизмов и существование тождественного морфизма очевидны (проверьте это).

Замечание 16.20. Множество морфизмов из $\tilde{M}$ в $\tilde{M}'$ обозначается $\mathcal{M}\mathrm{or}(\tilde{M}, \tilde{M}')$. Когда надо подчеркнуть зависимость от M, пишут

$$\mathcal{M}\mathrm{or}_M(\tilde{M}, \tilde{M}')$$

(читается "множество морфизмов $\tilde{M}$ в $\tilde{M}'$ над M).

Определение 16.21. Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – накрытие. Мы говорим, что оно **расщепляется**, если $\tilde{M} = M \times V$, где V – множество с дискретной топологией, и это разложение совместимо с проекцией в M. Расщепляющееся накрытие также называют **тривиальным**.

Определение 16.22. Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – накрытие. Если $U \subset M$ – открытое подмножество, то $\pi\Big|_{\pi^{-1}(U)} \pi^{-1}(U) \longrightarrow U$ – тоже накрытие (проверьте). Оно называется **ограничением накрытия π на U**. Ограничение накрытия π на достаточно малое открытое множество $U \subset M$ тривиально, по определению накрытия. Это свойство часто выражают, говоря, что накрытие **локально тривиально**, а чтобы уточнить, что локальность понимается как локальность по M – говорят, что оно **локально тривиально по базе**, или **локально тривиально по M**.

Замечание 16.23. Пусть M связно, а $\tilde{M} \longrightarrow M$ – тривиальное накрытие M. Тогда $\tilde{M} = M \times S$, где S – множество связных компонент $\tilde{M}$. В частности, все связные компоненты $\tilde{M}$ проектируются на M гомеоморфно.

Замечание 16.24. Пусть M связно, а $\psi: \tilde{M} \longrightarrow \tilde{M}'$ – морфизм тривиальных накрытий M. Тогда $\tilde{M} = M \times S$, и $\tilde{M}' = M \times S'$, где S, S' – множество связных компонент $\tilde{M}$, $\tilde{M}'$. Образ связной компоненты $\tilde{M}$ связен, следовательно, лежит целиком в связной компоненте $\tilde{M}'$. Пусть $\psi_S: S \longrightarrow S'$ – отображение, индуцированное ψ на связных компонентах. Тогда

$$\psi(m, s) = (m, \psi_S(s)).$$

(проверьте).

Определение 16.25. Пусть M – топологическое пространство. M называется **локально связным**, если у каждой точки $x \in M$ есть связная окрестность, и **локально линейно связным**, если у каждой точки $x \in M$ есть линейно связная окрестность.

Замечание 16.26. Отметим, что из связности не следует локальная связность, а из линейной связности не следует локальная линейная связность. С другой стороны, локально линейно связное связное пространство линейно связно (см. доказательство Леммы 16.29 ниже).

Утверждение 16.27: Пусть $\psi: \tilde{M} \longrightarrow \tilde{M}'$ – морфизм накрытий M, причем M локально связно. Тогда ψ это накрытие $\tilde{M}'$.

Доказательство: Это утверждение локально по M, значит, можно предположить, что M связно, а накрытия $\tilde{M}$ и $\tilde{M}'$ расщепляются. В силу Замечания 16.24, $\tilde{M} = M \times S$, $\tilde{M}' = M \times S'$, а $\psi(m, s) = (m, \psi_S(s))$, где ψ_S – отображение, индуцированое ψ на множестве компонент связности $\tilde{M}$ и $\tilde{M}'$. Но отображение $\psi(m, s) = (m, \psi_S(s))$ является тривиальным накрытием на каждой связной компоненте $\tilde{M}'$. Поэтому ψ – локально тривиальное накрытие $\tilde{M}'$ (проверьте). ■

16.3. Односвязные пространства

Определение 16.28. Связное топологическое пространство M называется **этально односвязным**, если любое накрытие M расщепляется.

Впоследствии нам понадобится следующая простая лемма.

Лемма 16.29: Пусть $\tilde{M} \longrightarrow M$ - накрытие, причем M локально линейно связно, а $\tilde{M}$ связно. Тогда $\tilde{M}$ линейно связно.

Доказательство: Поскольку M локально линейно связно, $\tilde{M}$ тоже локально линейно связно. Объединение всех линейно связных множеств, содержащих точку $x \in \tilde{M}$, открыто в $\tilde{M}$, в силу локальной линейной связности $\tilde{M}$. Это задает разбиение $\tilde{M}$ в компоненты линейной связности, которые открыты. А поскольку $\tilde{M}$ связно, такая компонента всего одна. ■

Теорема 16.30: Любое выпуклое, замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^n$ этально односвязно.

Доказательство. Шаг 1: Пусть M – выпуклое, замкнутое подмножество $\mathbb{R}^n$, а $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – накрытие. Поскольку M локально связно (докажите это), $\tilde{M}$ локально связно. Поэтому $\tilde{M}$ – несвязное объединение своих компонент связности. Для доказательства этальной односвязности M достаточно убедиться, что каждая из этих компонент связности является тривиальным накрытием M. Поэтому можно считать, что $\tilde{M}$ связно.

Шаг 2: Поскольку $\tilde{M}$ связно, а M линейно связно (докажите), $\tilde{M}$ линейно связно, в силу Леммы 16.29.

Шаг 3: Рассмотрим M как метрическое пространство, с евклидовой метрикой, индуцированной из $\mathbb{R}^n$. Любые две точки $x, y \in \tilde{M}$ можно соединить путем

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \tilde{M},$$

потому что $\tilde{M}$ линейно связно. Определим длину пути $l(\gamma)$ как длину его образа $\gamma_\pi := \gamma \circ \pi$ в M. Если две точки $\gamma(t), \gamma(t+\varepsilon)$ содержатся в окрестности $U \subset \tilde{M}$, которая гомеоморфно проектируется на выпуклое подмножество $U \subset M$, можно заменить участок $(\gamma(t), \gamma(t+\varepsilon))$ пути γ на прообраз отрезка, соединяющего точки $\pi(\gamma(t)), \pi(\gamma(t+\varepsilon))$. По определению накрытия, γ покрывается такими открытыми множествами целиком (проверьте это). Поскольку $\gamma([a,b])$ компактен, его можно покрыть конечным набором таких открытых множеств. Заменив каждый сегмент $(\gamma(t), \gamma(t+\varepsilon))$ на прямолинейный, как указано выше, мы получим путь γ, который проектируется в ломаную $\gamma_\pi : [a,b] \longrightarrow M$. Следовательно, любые две точки можно соединить путем конечной длины. Определим метрику на $\tilde{M}$ по формуле

$$\tilde{d}(x,y) = \inf_\gamma l(\gamma),$$

где инфимум берется по всем путям, соединяющим x и y. Легко видеть, что эта формула задает на $\tilde{M}$ метрику (докажите).

Шаг 4: Метрика $\tilde{d}$ задает на пространстве $\tilde{M}$ топологию, в которой небольшой окрестностью точки $x \in \tilde{M}$ будет связная компонента прообраза $\pi^{-1}(U)$, где $U \ni \pi(x)$ – окрестность $\pi(x)$. Следовательно, $\tilde{d}$ согласована с исходной топологией на $\tilde{M}$.

Шаг 5: Докажем, что $\tilde{M}$ с такой метрикой полно. Легко видеть, что $\tilde{d}(x,y) \geqslant d(\pi(x),\pi(y))$ (докажите). Поэтому для любой последовательности Коши $\{x_i\}$ в $\tilde{M}$, ее образ $\{\pi(x_i)\}$ – последовательность Коши. Поскольку M полно, $\{\pi(x_i)\}$ сходится к точке $\underline{x} \in M$. Поэтому почти все члены последовательности $\{x_i\}$ содержатся в $\pi^{-1}(U)$, для любой окрестности $U \ni x$. Без ограничения общности, можно считать, что U выбрано обраниченным, следовательно, замыкание $\bar{U}$ компактно. Выбрав U достаточно малым, можно считать, что $\pi^{-1}(\bar{U})$ – объединение непересекающихся компактов (компонент связности $\pi^{-1}(\bar{U})$), гомеоморфных $\bar{U}$. Эти компоненты связности отстоят друг от друга на положительное расстояние, а значит, почти все элементы последовательности Коши $\{x_i\}$ содержатся в одной из связных компонент (докажите). Обозначим эту связную компоненту за U_0. По построению, U_0 изометрически проектируется на U. Следовательно, $\{x_i\}$ сходится к $\pi^{-1}(\underline{x}) \cap U_0$. Полнота $\tilde{M}$ доказана.

Шаг 6: По построению, метрика в $\tilde{M}$ является внутренней (вычисляется как длина путей), а значит, удовлетворяет условию Хопфа-Ринова. Также это пространство полно (шаг 5) и локально компактно (оно локально гомеоморфно $\mathbb{R}^n$). По теореме Хопфа-Ринова, расстояние в $\tilde{M}$ реализуется геодезическими, то есть для любых $x,y \in \tilde{M}$, $\tilde{d}(x,y) = a$, есть изометрическое вложение $[0,a] \xrightarrow{\gamma} \tilde{M}$.

Шаг 7: Пусть $x \in \tilde{M}$. Тогда x содержится в $U \subset \tilde{M}$, которая проектируется гомеоморфно в $\pi(U)$. Заменив U на окрестность поменьше, можно считать, что $\pi(U)$ выпукло (докажите это). Для любой $y \in U$, имеем $\tilde{d}(x,y) = d(\pi(x), \pi(y))$, потому что можно соединить $\pi(x), \pi(y)$ отрезком, а потом поднять этот отрезок в $\tilde{M}$, воспользовавшись тем, что $U \longrightarrow \pi(U)$ – гомеоморфизм. Поэтому геодезические в $\tilde{M}$ проектируются в отрезки прямой. Следовательно, $\pi : (\tilde{M}, \tilde{d}) \longrightarrow (M, d)$ – изометрия. Мы доказали, что π это гомеоморфизм. ■

Следствие 16.31: Отрезок, квадрат, шар этально односвязны.

16.4. Поднятие накрытия

Определение 16.32. Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – накрытие, а $X \xrightarrow{\psi} M$ – непрерывное отображение. Отображение $X \xrightarrow{\tilde{\psi}} \tilde{M}$ называется **поднятием** ψ, если следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{tikzcd} & \tilde{M} \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[ur, "\tilde{\psi}"] \arrow[r, "\psi"] & M \end{tikzcd}$$

Определение 16.33. Пусть $X \xrightarrow{\psi} M$, $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – непрерывные отображения. Рассмотрим подмножество $\tilde{X} \subset X \times \tilde{M}$, состоящее из всех пар $(x, \tilde{m})$ таких, что $\psi(x) = \pi(\tilde{m})$, с топологией, индуцированной с $X \times \tilde{M}$. Это пространство называется **расслоенным произведением** X и $\tilde{M}$, и обозначается $X \times_M \tilde{M}$.

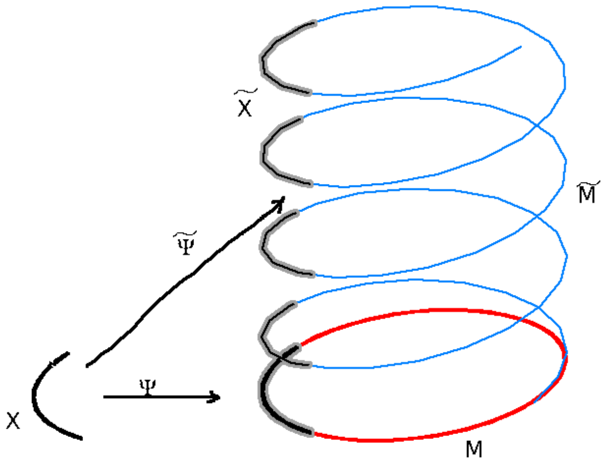
Задача 16.34. Пусть M хаусдорфово. Проверьте, что $X \times_M \tilde{M}$ – замкнутое подмножество в $X \times \tilde{M}$.

Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – накрытие, а $X \xrightarrow{\psi} M$ – непрерывное отображение. Пусть $\tilde{X}$ – расслоенное произведение X и $\tilde{M}$ над M. Обозначим за π_X проекцию из $\tilde{X}$ на X. В окрестности $U \ni \psi(x)$, расслоение π расщепляется: $\pi^{-1}(U) = U \times S$. Поэтому в $U_X := \psi^{-1}(U)$, имеем $\pi_X^{-1}(U_X) = U_X \times S$ (проверьте это). Значит, это накрытие. Мы получили следующую простую лемму

Лемма 16.35: Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – накрытие, а $X \xrightarrow{\psi} M$ – непрерывное отображение. Тогда расслоенное произведение $X \times_M \tilde{M}$ – накрытие X.

Определение 16.36. В такой ситуации, $X \times_M \tilde{M} \longrightarrow X$ называется **индуцированным накрытием** X.

Следующая теорема важная, но простая. Ее доказательство вполне очевидно из иллюстрации, приведенной ниже.



Поднятие отображения $X \xrightarrow{\psi} M$ на накрытие

Теорема 16.37: Пусть $\tilde M \xrightarrow{\pi} M$ – накрытие, а $X \xrightarrow{\psi} M$ – непрерывное отображение. Предположим, что X этально односвязно. Тогда существует поднятие $X \xrightarrow{\tilde\psi} \tilde M$. Более того, для любой точки $x \in X$ и любой точки $\tilde x \in \pi^{-1}(\psi(x))$, существует и единственно поднятие $X \xrightarrow{\tilde\psi} \tilde M$ такое, что $\tilde\psi(x) = \tilde x$.

Доказательство: Пусть $\pi_X : \tilde X \longrightarrow X$ – индуцированное накрытие. Поскольку оно расщепляется, имеем $\tilde X = X \times S$. Для каждой из компонент связности $X \subset \tilde X$, естественная проекция $\tilde X \longrightarrow \tilde M$ задает поднятие $\tilde\psi : X \longrightarrow \tilde M$. Каждое из таких поднятий единственным образом определяется выбором компоненты связности, но эти компоненты параметризованы точками прообраза $\pi^{-1}(\psi(x))$: каждая из компонент содержит ровно одну из точек этого множества. ■

16.5. Накрытия и пути

Замечание 16.38. Пусть (M, m) – отмеченное пространство, $(\tilde{M}, \tilde{m})$ – его накрытие, а $\gamma \in \Omega(M, m)$ – петля. Поскольку отрезок односвязен, отображение $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ поднимается единственным образом до пути $\tilde{\gamma} : [0,1] \longrightarrow \tilde{M}$, причем $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{m}$. Такой путь называется **поднятием петли γ на накрытие**. Понятно, что $\tilde{\gamma}$ – уже не петля: точка $\tilde{\gamma}(0)$ может быть не равна $\tilde{\gamma}(1)$.

Утверждение 16.39: Пусть (M, m) – отмеченное пространство,

$$(\tilde{M}, \tilde{m}) \longrightarrow (M, m)$$

– его накрытие, $\gamma, \gamma' \in \Omega(M, m)$ – гомотопные петли, а $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\gamma}'$ – их поднятия. Тогда $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}'(1)$.

Доказательство: Пусть $h : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow M$ – отображение из квадрата, которое осуществляет гомотопию γ и γ'. По определению, h переводит две противоположные стороны квадрата в γ и γ', а две другие – в m. Поскольку квадрат односвязен, h поднимается до $\tilde{h} : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \tilde{M}$, таким образом, что $(0,0)$ переходит в $\tilde{m}$. На двух сторонах квадрата h постоянное, но поднятие тривиального пути, очевидно, тривиально. Поэтому на этих двух сторонах $\tilde{h}$ тоже постоянное. Значит,

$$\tilde{\gamma}(1) = \tilde{h}(1,0) = \tilde{h}(1,1) = \tilde{\gamma}'(1).$$

■

Следствие 16.40: Пусть (M, m) – связное и локально линейно связное отмеченное пространство, которое имеет тривиальную фундаментальную группу. Тогда M этально односвязно.

Доказательство: Рассмотрим накрытие $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$. Достаточно доказать, что $\tilde{M}$ тривиально, если оно связно. Пусть $x_1, x_2 \in \pi^{-1}(x)$. Поскольку $\tilde{M}$ локально линейно связно и связно, оно линейно связно, а значит, точки x_1, x_2 можно соединить путем $\tilde{\gamma}$. Рассмотрим путь $\gamma := \tilde{\gamma} \circ \pi$. Этот путь гомотопен тривиальному, потому что $\pi_1(M, m) = \{1\}$. Поднятие тривиального пути тривиально, а значит, оба его конца совпадают. В силу Утверждения 16.39, то же верно и для γ, значит, $x_1 = x_2$. ■

Обратное утверждение тоже верно, хотя и в более ограничительных предположениях.

Для доказательства этого полезно изучить, как зависит $\pi_1(M,m)$ от точки $m \in M$. Пусть $x, y \in M$, а ξ – путь из x в y. Для каждой петли $\gamma \in \Omega(M,y)$, рассмотрим путь $\xi\gamma\xi^{-1}$, определенный по формуле

$$\xi\gamma\xi^{-1}(\lambda) = \begin{cases} \xi(3\lambda), & \text{если} \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1/3 \\ \gamma(3\lambda - 1), & \text{если} \quad 1/3 \leqslant \lambda \leqslant 2/3, \\ \xi(3 - \lambda), & \text{если} \quad 2/3 \leqslant \lambda \leqslant 1. \end{cases}$$

(проходим из x в y по ξ, обходим y по γ, и возвращаемся в x в обратную сторону по ξ). Легко видеть, что $\xi\gamma\gamma'\xi^{-1}$ гомотопно $\xi\gamma\xi^{-1}\xi\gamma'\xi^{-1}$ (докажите). Поэтому $\gamma \longrightarrow \xi\gamma\xi^{-1}$ задает гомоморфизм групп

$$\pi_1(M,y) \longrightarrow \pi_1(M,x).$$

Этот гомоморфизм, очевидно, обратим (докажите), а следовательно группа $\pi_1(M,y)$ изоморфна $\pi_1(M,x)$. Нетрудно убедиться, что этот изоморфизм зависит от выбора пути γ.

Обозначим за $\pi_1(m,x)$ множество гомотопических классов путей из m в x. Тот же аргумент, что и выше, позволяет построить биекцию между $\pi_1(m,x)$ и $\pi_1(M,m)$.

Пусть (M,m) – отмеченное пространство, связное и локально линейно связное. Предположим, что у M есть база топологии, состоящая из множеств U с $\pi_1(U) = \{1\}$. Зафиксируем такое U, его точку x, и пусть γ – путь из m в x. Обозначим за $\mathcal{U}_\gamma$ множество всех пар $(y, \gamma' \in \pi_1(m,y))$, где $y \in U$, и существует путь ν из y в x, целиком лежащий в U и такой, что $\gamma'\nu\gamma^{-1}$ гомотопно нулю (тривиальному пути). Поскольку все пути из x в y, лежащие в U, гомотопны, естественная проекция из $\mathcal{U}_\gamma$ в U – гомеоморфизм (проверьте это).

Пусть $\tilde{M}$ – множество всех пар $(x, \gamma \in \pi_1(m,x))$, с топологией, база которой задана множествами вида $\mathcal{U}_\gamma$. Легко видеть, что пересечение таких множеств имеет такой же вид, и поэтому $\mathcal{U}_\gamma$ задает топологию на $\tilde{M}$. Естественная проекция $\tilde{M} \longrightarrow M$ этальна по построению, а поскольку $\pi^{-1}(U)$ – объединение $\mathcal{U}_\gamma$ для всех гомотопических классов путей из m в $x \in U$, π это накрытие.

Наконец, пусть $\gamma \in \pi_1(M,m)$ класс, негомотопный нулю, пусть $\tilde{\gamma}$ – его поднятие в $\tilde{M}$, такое, что $\gamma(0)$ соответствует паре (m, γ_0), где γ_m – тривиальный путь. Тогда $\gamma(1)$ соответствует паре (m, γ), значит, накрытие $\tilde{M} \longrightarrow M$ нетривиально.

Мы получили следующее утверждение

Утверждение 16.41: Пусть (M, m) – отмеченное пространство, которое связно и локально линейно связно. Предположим, что у M есть база топологии, состоящая из множеств U с $\pi_1(U) = \{1\}$, и M этально односвязно. Тогда $\pi_1(M, m) = \{1\}$.

■

Замечание 16.42. Исторически, односвязность M означает $\pi_1(M, m) = \{1\}$. В большинстве книг по топологии односвязность определяют именно так. В предположениях Утверждения 16.41, $\pi_1(M, m) = \{1\}$ тогда и только тогда, когда любое накрытие M расщепляется, значит, в этой ситуации этальная односвязность равносильна обычной.

Замечание 16.43. Пусть $\pi_1(M, m) \neq \{1\}$. Накрытие $\tilde{M}$, которое строится в доказательстве Утверждения 16.41, можно построить явно, используя топологию на пространстве путей, которую мы определили в Лекции 11. Пусть $\tilde{\Omega}(M, m)$ – пространство всех путей с начальной точкой m. Предположим, что у каждого пути $\gamma \in \Omega(M, m)$, ведущего из m в x, есть окрестность в топологии на $\tilde{\Omega}(M, m)$ такая, что все ее точки гомотопны γ в классе путей из m в x. В предположениях 16.41 это верно (докажите). Обозначим $\gamma \sim \gamma'$, если γ, γ' – гомотопные пути из m в x. Обозначим за $\tilde{M}$ факторпространство $\tilde{\Omega}(M, m)$ по этому отношению эквивалентности. Естественная проекция $\tilde{M} \longrightarrow M$, переводящая γ в $x = \gamma(1)$, является накрытием, и эквивалентна накрытию $\tilde{M}$, построенному выше (проверьте). Мы не будем пользоваться этим наблюдением.

16.6. Произведение накрытий

Определение 16.44. Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M, \tilde{M}' \xrightarrow{\pi'} M$ – накрытия M. Рассмотрим расслоенное произведение $\tilde{M} \times_M \tilde{M}' \subset \tilde{M} \times \tilde{M}'$, состоящее из всех $(x, y) \in \tilde{M} \times \tilde{M}'$, таких, что $\pi(x) = \pi'(y)$. Тогда $\tilde{M} \times_M \tilde{M}'$ называется **произведением накрытий**.

Замечание 16.45. Произведение $\tilde{M} \times_M \tilde{M}'$ является накрытием M. В самом деле, локально по M, $\tilde{M}$ изоморфно $S \times M$, $\tilde{M}'$ изоморфно $S' \times M$, следовательно, $\tilde{M} \times_M \tilde{M}'$ изоморфно $S \times S' \times M$.

Замечание 16.46. Легко видеть, что для любого накрытия M_1 над M,

$$\mathcal{M}\mathrm{or}(M_1, \tilde{M} \times_M \tilde{M}') = \mathcal{M}\mathrm{or}(M_1, \tilde{M}) \times \mathcal{M}\mathrm{or}(M_1, \tilde{M}').$$

Определение 16.47. Пусть $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ – морфизм накрытий M. Рассмотрим подмножество $\Gamma_\varphi \subset M_1 \times_M M_2$, состоящее из всех пар вида $(x, \varphi(x))$. Это подмножество называется **графиком** морфизма M.

Замечание 16.48. Проекция графика Γ_φ на M_1 – гомеоморфизм (докажите это). Поэтому Γ_φ – накрытие M. Поскольку локально по M график Γ_φ – объединение нескольких копий M, он открытозамкнут в $M_1 \times_M M_2$.

Пусть $\tilde{M} \longrightarrow M$ – накрытие. Чтоб подчеркнуть аналогию с теорией Галуа, мы будем обозначать его как $[\tilde{M} : M]$.

Определение 16.49. Пусть $[\tilde{M} : M]$ – накрытие. Оно называется **связным**, если M и $\tilde{M}$ связны и локально связны.

Утверждение 16.50: Пусть $[\tilde{M} : M]$ – накрытие, причем M связно и локально связно. Тогда $\tilde{M}$ является несвязным объединением своих компонент связности $\tilde{M}_i$. Более того, каждая из компонент $\tilde{M}_i$ является связным накрытием M.

Доказательство: Поскольку M локально связно, а $\tilde{M}$ локально гомеоморфно M, оно тоже локально связно. Поэтому любая связная компонента $\tilde{M}$ открыта (докажите это). Значит, $\tilde{M}$ – несвязное объединение своих компонент связности. Пусть теперь $U \subset M$ – связное открытое подмножество, над которым $\tilde{M}$ расщепляется. Тогда $\pi^{-1}(U)$ – несвязное объединение нескольких копий U. Каждая из этих копий целиком лежит в одной из связных компонент $\tilde{M}_i$, следовательно, $\tilde{M}_i \cap \pi^{-1}(U)$ тоже несвязное объединение копий U. Поэтому $\tilde{M}_i$ – накрытие. ■

Следствие 16.51: Пусть $[\tilde{M} : M]$ – связное накрытие. Тогда график любого морфизма $\varphi \in \mathcal{M}\mathrm{or}(\tilde{M}, \tilde{M})$ – связная компонента в $\tilde{M} \times_M \tilde{M}$. Связная компонента $\tilde{M}' \subset \tilde{M} \times_M \tilde{M}$ является графиком морфизма $\varphi \in \mathcal{M}\mathrm{or}(\tilde{M}, \tilde{M})$ тогда и только тогда, когда проекция $\tilde{M}'$ на первую компоненту задает изоморфизм $\tilde{M}' \longrightarrow \tilde{M}$.

Доказательство: Если $\tilde{M}'$ – график, он открытозамкнут в $\tilde{M} \times_M \tilde{M}$ (это локальное утверждение, а локально $\tilde{M}'$ – объединение нескольких компонент $\tilde{M} \times_M \tilde{M}$). Поэтому он является связной компонентой.

Обратное тоже верно, потому что любая связная компонента является накрытием, а если $\tilde{M}'$ гомеоморфно проектируется на $\tilde{M}$, проекция на вторую компоненту задает морфизм накрытий из $\tilde{M} \cong \tilde{M}'$ на $\tilde{M}$. По построению, $\tilde{M}'$ является графиком этого морфизма. ■

Замечание 16.52. Пусть $[\tilde{M} : M]$ – связное накрытие. Рассмотрим $\tilde{M} \times_M \tilde{M}$ как накрытие $\tilde{M}$ относительно проекции на первую компоненту. Тогда

$$\mathcal{M}\mathrm{or}_{\tilde{M}}(\tilde{M}, \tilde{M} \times_M \tilde{M}) = \mathcal{M}\mathrm{or}_M(\tilde{M}, \tilde{M}).$$

В самом деле, морфизмы $\mathcal{M}\mathrm{or}_{\tilde{M}}(\tilde{M}, \tilde{M} \times_M \tilde{M})$ взаимно однозначно соответствуют компонентам $\tilde{M} \times_M \tilde{M}$, которые изоморфно проектируются на $\tilde{M}$, но в силу предыдущего следствия это то же самое, что морфизмы из $\tilde{M}$ в себя.

16.7. Накрытия Галуа и группа Галуа

Определение 16.53. Пусть $[\tilde{M} : M]$ – связное накрытие. Оно называется **накрытием Галуа**, если $\tilde{M} \times_M \tilde{M} \longrightarrow \tilde{M}$ расщепляется.

Замечание 16.54. Отметим, что

$$\mathcal{M}\mathrm{or}_{\tilde{M}}(\tilde{M}, \tilde{M} \times_M \tilde{M}) = \mathcal{M}\mathrm{or}_M(\tilde{M}, \tilde{M}).$$

(Замечание 16.52). Поэтому $[\tilde{M} : M]$ является накрытием Галуа тогда и только тогда, когда каждая пара $(x, y) \in \tilde{M} \times_M \tilde{M}$ принадлежит графику морфизма ν. Из соображений симметрии, график Γ_ν проектируется изоморфно на оба сомножителя $\tilde{M}$, значит, ν это изоморфизм.

Из этого замечания сразу вытекает следующее полезное утверждение.

Утверждение 16.55: Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – связное накрытие. Тогда следующие утверждения равносильны.

(i) $[\tilde{M} : M]$ – накрытие Галуа

(ii) для любых точек $x, y \in \tilde{M}$, таких, что $\pi(x) = \pi(y)$, существует автоморфизм $\tilde{M}$, переводящий x в y.

■

Определение 16.56. Пусть G – группа, действующая на множестве M. Действие группы называется **свободным**, если для любого неединичного $g \in G$ и любого $m \in M$, имеем $gm \neq m$. Действие группы называется **транзитивным**, если M состоит из одной орбиты.

Замечание 16.57. Пусть $[\tilde{M} : M]$ – связное накрытие. Обозначим за $\mathsf{Aut}[\tilde{M} : M]$ группу автоморфизмов $\tilde{M}$ над M. Тогда $\mathsf{Aut}[\tilde{M} : M]$ свободно действует на M. Действительно, пусть $g \in \mathsf{Aut}[\tilde{M} : M]$ – элемент, сохраняющий $x \in M$. Тогда график Γ_g пересекается с графиком тождественного отображения Γ_{Id}. Но поскольку график автоморфизма является связной компонентой $\tilde{M} \times_M \tilde{M}$, они совпадают:

$$\Gamma_g = \Gamma_{\mathsf{Id}}.$$

Напомним, что **слоем** накрытия $\pi : \tilde{M} \longrightarrow M$ называется множество $\pi^{-1}(x)$, где $x \in M$.

Следующее утверждение немедленно следует из Утверждения 16.55 (проверьте это).

Утверждение 16.58: Связное накрытие $[\tilde{M} : M]$ является накрытием Галуа тогда и только тогда, когда действие $\mathsf{Aut}[\tilde{M} : M]$ на любом слое $[\tilde{M} : M]$ транзитивно.
■

Определение 16.59. Пусть $[\tilde{M} : M]$ – накрытие Галуа. Тогда группа автоморфизмов $\mathsf{Aut}[\tilde{M} : M]$ называется **группой Галуа накрытия**.

Замечание 16.60. Пусть задано вполне несвязное действие группы G на связном, локально связном топологическом пространстве $\tilde{M}$. Тогда $[\tilde{M} : \tilde{M}/G]$ – накрытие Галуа. Обратное тоже верно: любое накрытие Галуа имеет вид $[\tilde{M} : \tilde{M}/G]$, где G – группа Галуа $[\tilde{M} : M]$ (докажите это).

16.8. Теория Галуа для накрытий

Следующая лемма вполне очевидна (докажите ее).

Лемма 16.61: Пусть $W_1 \longrightarrow W_2 \longrightarrow W_2$ – накрытия, причем $W_1 \longrightarrow W_2$ инъективно, а $[W_2 : W_3]$ расщепляется. Тогда $W_1 : W_3$ тоже расщепляется.

Утверждение 16.62: Пусть $M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3$ – накрытия, причем $[M_1 : M_3]$ – накрытие Галуа. Тогда $[M_1 : M_2]$ – тоже накрытие Галуа.

Доказательство: Рассмотрим последовательность накрытий

$$M_1 \times_{M_2} M_1 \longrightarrow M_1 \times_{M_3} M_1 \longrightarrow M_1.$$

Накрытие $M_1 \times_{M_3} M_1 \longrightarrow M_1$ расщепляется, потому что $[M_1 : M_3]$ накрытие Галуа, а естественное вложение $M_1 \times_{M_2} M_1 \longrightarrow M_1 \times_{M_3} M_1$ инъективно по построению (проверьте). В силу предыдущей леммы, из этого следует, что $M_1 \times_{M_2} M_1 \longrightarrow M_1$ расщепляется. ■

Утверждение 16.63: Пусть $M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3$ – накрытия, причем $[M_1 : M_2]$ – накрытие Галуа, и $[M_2 : M_3]$ – накрытие Галуа. Тогда $[M_1 : M_3]$ – тоже накрытие Галуа.

Доказательство: Рассмотрим изоморфизм

$$M_1 \times_{M_3} M_1 = M_1 \times_{M_2} (M_2 \times_{M_3} M_2) \times_{M_2} M_1.$$

В силу того, что $[M_2 : M_3]$ – накрытие Галуа, имеем $M_2 \times_{M_3} M_2 = \coprod_{\alpha\in I} M_2$, для какого-то набора индексов I, и поэтому имеем

$$\begin{aligned} M_1 \times_{M_3} M_1 =& M_1 \times_{M_2} (M_2 \times_{M_3} M_2) \times_{M_2} M_1 \\ =& M_1 \times_{M_2} \left(\coprod_{\alpha\in I} M_2\right) \times_{M_2} M_1 = \coprod_{\alpha\in I} M_1 \times_{M_2} M_1. \end{aligned}$$

Последнее выражение есть несвязная сумма нескольких копий M_1. Поэтому $[M_1 \times_{M_3} M_1 : M_1]$ расщепляется. ■

Замечание 16.64. Пусть $[\tilde{M} : M]$ – накрытие Галуа, а $G = \mathsf{Aut}[\tilde{M} : M]$ – его группа Галуа. Отметим, что G вполне разрывно действует на $\tilde{M}$ (проверьте это), и поэтому для любой подгруппы $G' \subset G$, определено факторпространство $\tilde{M}/G'$, которое тоже является накрытием.

Определение 16.65. Пусть $[\tilde{M} : M]$ – связное накрытие. **факторнакрытием** $[\tilde{M} : M]$ называется накрытие $[\tilde{M}' : M]$ такое, что задан сюрьективный морфизм накрытий $\tilde{M} \longrightarrow \tilde{M}'$.

Теорема 16.66: (Основная теорема теории Галуа)
Пусть $[\tilde{M} : M]$ – накрытие Галуа, $G = \mathsf{Aut}[\tilde{M} : M]$ – его группа Галуа, а $G' \subset G$ – любая подгруппа. Тогда $\tilde{M}/G'$ – накрытие M. Более того, любое факторнакрытие $[\tilde{M} : M]$ получается таким образом.

Доказательство: Пусть $[\tilde{M}' : M]$ – факторнакрытие $[\tilde{M} : M]$. Тогда $\tilde{M} \longrightarrow \tilde{M}' \longrightarrow M$ последовательность накрытий, причем $[\tilde{M} : M]$ – накрытие Галуа, значит, $[\tilde{M} : \tilde{M}']$ – тоже накрытие Галуа (Утверждение 16.62). Поэтому $\tilde{M}' = \tilde{M}/G'$, где G' – группа автоморфизмов $\tilde{M}$ над $\tilde{M}'$. Поскольку каждый такой автоморфизм является автоморфизмом $\tilde{M}$ над M, G' – подгруппа $\mathsf{Aut}[\tilde{M} : M]$. Мы получили взаимно-однозначное соответствие между факторнакрытиями и подгруппами группы Галуа. ■

16.9. Универсальное накрытие

Определение 16.67. Пусть $[\tilde{M} : M]$ – связное накрытие. Оно называется **этальным универсальным накрытием**, если $\tilde{M}$ этально односвязно.

Замечание 16.68. Универсальное накрытие является накрытием Галуа. Действительно, раз $\tilde{M}$ этально односвязно, то $\tilde{M} \times_M \tilde{M}$ расщепляется над $\tilde{M}$.

Замечание 16.69. Универсальное накрытие единственно с точностью до изоморфизма. Действительно, пусть $\tilde{M}$, $\tilde{M}'$ – два универсальных накрытия. Поскольку $\tilde{M}$ и $\tilde{M}'$ этально односвязны, любая связная компонента их произведения $\tilde{M} \times_M \tilde{M}'$ расщепляется над $\tilde{M}$ и над $\tilde{M}'$, значит, является графиком изоморфизма.

Определение 16.70. Локально связное топологическое пространство M называется **локально этально односвязным**, если у каждой точки есть связная, этально односвязная окрестность.

Определение 16.71. Пусть $\{M_\alpha \xrightarrow{\pi_\alpha} M\}$ – набор накрытий локально этально односвязного пространство M. Если все эти накрытия расщепляются, $M_\alpha = S_\alpha \times M$, определим $\prod_M M_\alpha$ как $M \times \prod S_\alpha$. В общем случае, возьмем в обыкновенном произведении $\prod M_\alpha$ подмножество, состоящее из точек $\prod x_\alpha$ с $\pi_\alpha(s_\alpha) = x$, и введем на нем топологию, взяв в качестве базы открытые подмножества в $U \times \prod S_\alpha$, где $U \subset M$ - открытое множество, где все M_α расщепляются и имеют вид $\pi_\alpha^{-1}(U) = U \times S_\alpha$.

Замечание 16.72. Отметим, что произведение накрытий не является расслоенным произведением в смысле Тихонова. В самом деле, произведение конечных накрытий компактов не обязательно конечно, значит, может не быть компактом (приведите пример, когда произведение компактных накрытий некомпактно).

В доказательстве существования универсального накрытия нам понадобится следующая лемма

Лемма 16.73: Пусть $[\tilde{M} : M]$ – связное накрытие. Тогда $\tilde{M}$ – фактор-накрытие накрытия Галуа.

Доказательство: Мы будем строить накрытие Галуа $[M_G : M]$ как компоненту произведения $\prod_M M_\alpha$, где все M_α изоморфны $\tilde{M}$.

Шаг 1: Пусть $M_G \times_{\tilde{M}} \tilde{M}$ расщепляется как накрытие M_G. Тогда M_G – это накрытие Галуа. В самом деле, M_G это компонента в $\prod_M M_\alpha$, но раз $M_G \times_{\tilde{M}} \tilde{M}$ расщепляется над M_G, то и $M_G \times_{\tilde{M}} \prod_M M_\alpha$ расщепляется над M_G. Следовательно $M_G \times_{\tilde{M}} M_G$ расщепляется над M_G.

Шаг 2: Пусть $x_1 \in M_G$ выбранная точка, а x – ее образ в M. Предположим, что для каждого $y \in \tilde{M}$ в слое над x, существует морфизм накрытий $\varphi \in \mathcal{M}\mathrm{or}(M_G, \tilde{M})$, переводящий x_1 в y. Тогда слой проекции $M_G \times \tilde{M} \longrightarrow M_G$ содержится в объединении графиков всех морфизмов $\mathcal{M}\mathrm{or}_M(M_G, \tilde{M})$. Поэтому объединение всех таких графиков равно $M_G \times_{\tilde{M}} \tilde{M}$, а значит, $M_G \times_{\tilde{M}} \tilde{M}$ расщепляется над M_G.

Шаг 3: Возьмем произведение

$$\prod_M M_\alpha, \quad \alpha \in F_x,$$

проиндексированное всеми точками слоя F_x над x, и пусть M_G – компонента, которая содержит точку $x_1 = \prod_{y \in F_x} y$. Обозначим за π_y проекцию $\prod_M M_\alpha$ на компоненту, соответствующую $y \in F_x$. Тогда $\pi_y(x_1) = y$. Следовательно, для любой точки $y \in \tilde{M}$ в слое над x, существует морфизм накрытий, переводящий x_1 в y. В силу шага 2, из этого следует, что $M_G \times_{\tilde{M}} \tilde{M}$ расщепляется над M_G, а в силу шага 1 - что M_G это расширение Галуа. ■

Универсальное накрытие M строится как произведение накрытий Галуа $\prod_M M_\alpha$, где M_α пробегает все классы изоморфизма накрытий Галуа. Чтоб это произведение имело смысл, нужно сначала убедиться, что классы изоморфизма накрытий Галуа M образуют множество. Связное накрытие $[\tilde M : M]$ задается набором множеств $\mathfrak{S} = \{U_\beta \subset M\}$, над которыми $\tilde M$ расщепляется, имея вид $U_\beta \times S_\beta$, и изоморфизмов $S_\beta \cong S_\gamma$ для любых пересекающихся $U_\beta, U_\gamma \in \mathfrak{S}$. Поскольку $\tilde M$ связно, группа, порожденная такими изоморфизмами, действует на S_β транзитивно. Поэтому мощность S_β не может быть больше $\mathbb{N}\times|\mathfrak{S}|$ (проверьте), а значит, мощность S_β ограничена $\mathbb{N}\times 2^{|M|}$. Поскольку мощность множества классов изоморфизма накрытий Галуа ограничена мощностью множества всех топологий на $S_\beta \times M$, эта мощность не больше $2^{2^{|M|\times\mathbb{N}\times 2^{|M|}}}$ (проверьте это). А коль скоро эта мощность ограничена, классы изоморфизма накрытий Галуа M образуют множество.

Теорема 16.74: Пусть M – связное, локально этально односвязное топологическое пространство, а M_G – связная компонента в $\prod_M M_\alpha$, где M_α пробегает все классы изоморфизма накрытий Галуа M. Тогда M_G – универсальное накрытие M.

Доказательство. Шаг 1: Пусть $[M_1 : M]$ – накрытие Галуа, а M'_G – произведение накрытий Галуа M по всем классам изоморфизма накрытий, кроме M_1. Тогда

$$\prod_M M_\alpha \times_M M_1 = M'_G \times_M M_1 \times_M M_1$$

Поскольку $M_1 \times_M M_1$ – несвязная сумма нескольких копий M_1,

$$\prod_M M_\alpha \times_M M_1$$

– несвязная сумма нескольких копий $\prod_M M_\alpha$. Следовательно,

$$\prod_M M_\alpha \times_M M_1$$

расщепляется над каждой связной компонентой $\prod_M M_\alpha$, а значит, накрытие

$$M_G \times_M M_1 \longrightarrow M_G$$

тоже расщепляется. Для любого накрытия $[M_1 : M_G]$, произведение $M_G \times_{M_G} M_1$ является поднакрытием (образом вложения накрытий) в $M_G \times_M M_1$:

$$M_G \times_{M_G} M_1 \hookrightarrow M_G \times_M M_1,$$

значит, оно тоже расщепляется. Поэтому любое накрытие Галуа M_1 расщепляется над M_G.

Шаг 2: Пусть M_2 – любое накрытие M_G (не обязательно накрытие Галуа). В силу предудущей леммы, M_2 является факторнакрытием накрытия Галуа $[M_1 : M_G]$, которое расщепляется. Поэтому M_2 тоже расщепляется (докажите). ■

16.10. Этальная фундаментальная группа

Пусть M локально линейно связно, $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – универсальное накрытие, а $x \in M$. Для каждого пути $\gamma \in \Omega(M, x)$, рассмотрим поднятие $\tilde{\gamma}$ в $\tilde{M}$. Поскольку $\mathsf{Aut}[\tilde{M} : M]$ действует транзитивно на $\pi^{-1}(x)$, группа $\mathsf{Aut}[\tilde{M} : M]$ действует транзитивно на множестве поднятий γ. Рассмотрим элемент $g_\gamma \in \mathsf{Aut}[\tilde{M} : M]$, который переводит $\tilde{\gamma}(0)$ в $\tilde{\gamma}(1)$. Поскольку действие $\mathsf{Aut}[\tilde{M} : M]$ транзитивно на множестве поднятий пути γ, элемент g_γ не зависит от выбора поднятия. Мы построили отображение $\pi_1(M, x) \longrightarrow \mathsf{Aut}[\tilde{M} : M]$.

Пусть $\gamma, \gamma' \in\in \Omega(M, x)$ – пути, а $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\gamma}'$ – их поднятия, причем $\tilde{\gamma}$ соединяет y_1 и y_2, а $\tilde{\gamma}'$ соединяет y_2 и y_3. Очевидно, $\gamma\gamma'$ поднимается до пути, который соединяет y_1 и y_3. Поэтому построенное отображение $\pi_1(M, x) \longrightarrow \mathsf{Aut}[\tilde{M} : M]$ – гомоморфизм. Если $\pi_1(\tilde{M}, y_1) = \{1\}$, класс гомотопии пути $\gamma \in \Omega(M, x)$ однозначно задается вторым концом y_2 поднятия $\tilde{\gamma}$, если $\tilde{\gamma}(0) = y_1$. Поскольку $\mathsf{Aut}[\tilde{M} : M]$ действует свободно и транзитивно на $\pi^{-1}(x)$, в такой ситуации $\pi_1(M, x) \longrightarrow \mathsf{Aut}[\tilde{M} : M]$ – биекция.

Определение 16.75. Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – универсальное накрытие. Группа Галуа $\mathsf{Aut}[\tilde{M} : M]$ называется **этальной фундаментальной группой пространства** M.

Замечание 16.76. В условиях Утверждения 16.41, $\pi_1(\tilde{M}, y_1) = \{1\}$, и группа $\mathsf{Aut}[\tilde{M} : M]$ равна $\pi_1(M, x)$. В этой ситуации этальная фундаментальная группа равна обычной.

В силу основной теоремы теории Галуа, накрытия $[M_1 : M]$ однозначно соответствуют подгруппам этальной фундаментальной группы.

Задача 16.77. Убедитесь, что накрытие $[M_1 : M]$ является накрытием Галуа тогда и только тогда, когда соответствующая ему подгруппа $\mathsf{Aut}[\tilde{M} : M]$ нормальна.

16.11. История, замечания

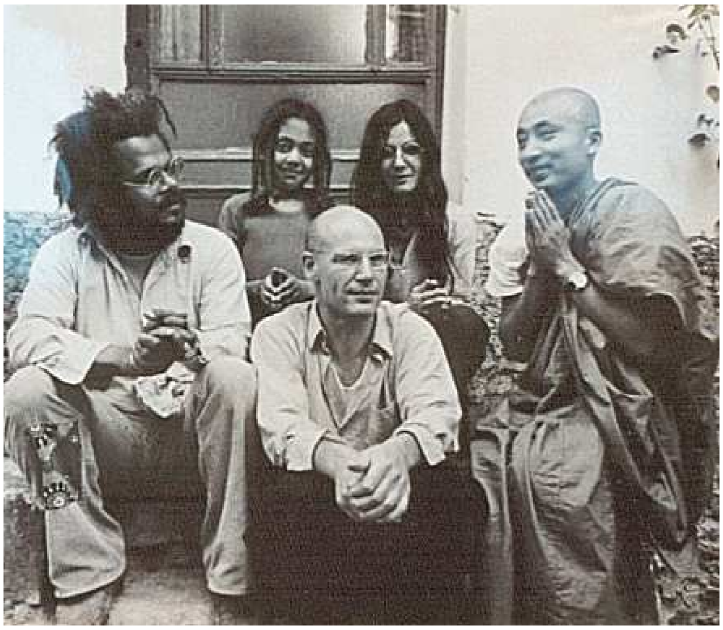
Фундаментальная группа впервые появилась в диссертации Римана в 1851 году. Риман интересовался продолжением голоморфных (комплексно дифференцируемых) функций в комплексной области. Риман обнаружил, что голоморфная функция однозначно продолжается вдоль любого пути, который не пересекается с множеством ее полюсов, но это продолжение может зависеть от выбора пути. Заменив комплексную область на ее накрытие, можно добиться того, чтобы продолжение функции было однозначно. Таким образом в математике появились римановы поверхности (многообразия вещественной размерности 2), накрытия и фундаментальная группа.

Georg Friedrich Bernhard Riemann
(1826 - 1866)

Начиная с 1860-х годов, топологию римановых поверхностей немало изучали Жордан, Мебиус и многие другие математики. Фундаментальная группа была определена (как множество, и довольно неформально) Жорданом, а Пуанкаре в 1895-м году определил ее строго, и одновременно обнаружил, что это группа.

Связь фундаментальной группы с накрытиями прослеживалась со времен Римана, но идея определить фундаментальную группу в терминах накрытий принадлежит Гротендику, который придумал, как строить топологические инварианты в алгебраической ситуации.

Совместно с Мишелем Рено, Гротендик в 1961-м году опубликовал исследование "Revêtements étales et groupe fondamental" (SGA1), первое в серии SGA (Séminaire de géométrie algébrique), где исследовал фундаментальную группу алгебраических объектов в терминах накрытий. Оказалось, что если воспользоваться подходящим понятием накрытия, можно определить этальную фундаментальную группу у огромного числа объектов алгебры и геометрии. Интересно, что в теории, развитой Гротендиком, частным случаем фундаментальной группы является группа Галуа алгебраического замыкания поля.



Alexander Grothendieck
(род. 28 марта 1928)

Простейшая ситуация, когда этот подход к фундаментальной группе применим на практике, таков. Рассмотрим пространство $\mathbb{C}\backslash\{x_1, ...x_n\}$ ($\mathbb{C}$ без конечного набора точек). Пусть $B \subset A$ – конечные подмножества $\mathbb{C}$. Легко видеть, что естественное отображение

$$\pi_1(\mathbb{C}\backslash A) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{C}\backslash B)$$

– наложение (докажите это). Рассмотрим предел $\pi_1(\mathbb{C}\backslash A)$ по увеличивающимся конечным подмножествам $A \subset \mathbb{C}$. Получится группа, изоморфная группе Галуа алгебраического замыкания $\mathbb{C}(t)$. Доказать это нетрудно, если интерпретировать (вслед за Риманом) алгебраические расширения поля рациональных функций как накрытия $\mathbb{C}\backslash\{x_1, ...x_n\}$.

В аннотации к SGA1 говорится "этот текст излагает теорию фундаментальных групп в алгебраической геометрии с точки зрения Кронекера, позволяя определить фундаментальную группу одинаковым способом для алгебраического многообразия (в обычном смысле слова) и, например, для кольца целых чисел в числовом поле." Что именно имел в виду Гротендик, когда упоминал "теорию фундаментальных групп с точки зрения Кронекера", в SGA1 не уточняется.

Первые два тома SGA были перенабраны в LaTeXе Французским Математическим Обществом и положены в arxiv.org: http://arxiv.org/abs/math/0206203 (SGA1) и http://arxiv.org/abs/math/0511279 (SGA2).

Более современное изложение теории этальных накрытий, этальных когомологий и этальной фундаментальной группы есть в книжке Милна "Этальные когомологии", но эта книжка требует хорошего знания алгебраической геометрии.

Чрезвычайно доступно изложено все то же самое в книге В. И. Данилова "Когомологии алгебраических многообразий. "Итоги" ВИНИТИ, СПМ, фунд. напр., т. 35.