# 11. Топология, лекция 11: Пространство непрерывных отображений

## 11.1. Топология равномерной сходимости на $C(X,Y)$

Пусть $X$ – компактное топологическое пространство, $Y$ – метрическое пространство, а $C(X,Y)$ – множество непрерывных отображений из $X$ в $Y$. Напомним, что на $C(X,Y)$ определена sup**-метрика** по формуле

$$d(f,f') = \sup_{x\in X} d(f(x), f'(x)).$$

Конечность супремума следует из компактности $X$ (докажите).

Напомним, что **окрестность** подмножества $Z$ топологического пространства – это открытое множество, которое содержит $Z$.

Пусть $\Delta_\varepsilon$ обозначает окрестность диагонали $\Delta$ в $Y\times Y$, заданную формулой

$$\Delta_\varepsilon = \{(y,y')\in Y\times Y \mid d(y,y')<\varepsilon\}.$$

Для каждого непрерывного отображения $\varphi: X \longrightarrow Y$, рассмотрим $\Phi = \varphi\times \mathsf{Id}_Y: X\times Y \longrightarrow Y\times Y$. Легко видеть, что график $\Gamma_\varphi$ получается как $\Gamma_\varphi = \varphi^{-1}(\Delta)$.

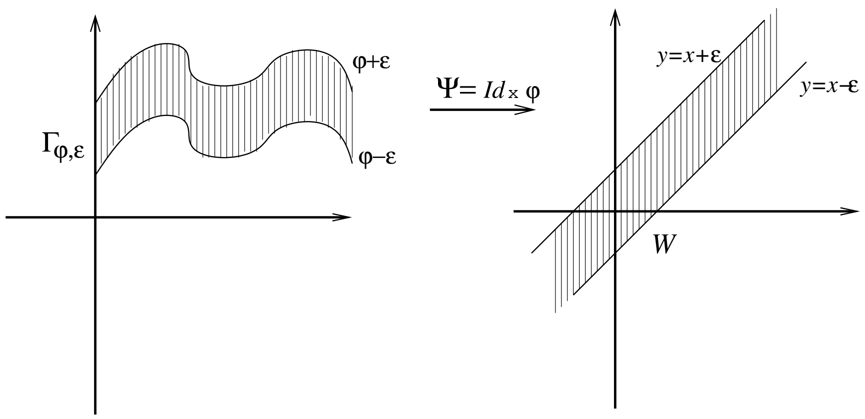
Пусть $\Gamma_{\varphi,\varepsilon} := \Phi^{-1}(\Delta_\varepsilon)$ – окрестность $\Gamma_\varphi$, полученная как прообраз $\Delta_\varepsilon$.

**Замечание 11.1.** На прошлой лекции мы доказали, что $d(\varphi,\varphi')<\varepsilon$ тогда и только тогда, когда график $\Gamma_{\varphi'}$ целиком лежит в $\Gamma_{\varphi,\varepsilon}$.

**Определение 11.2.** Пусть $X\times C(X,Y) \xrightarrow{\mathsf{ev}} Y$, переводит пару $(x,\varphi)$ в $\varphi(x)$. Это отображение называется **отображение эвалюоации** (вычисления).

Основное утверждение этой лекции – следующая теорема.

**Теорема 11.3:** Пусть $X$ – компактное топологическое пространство, $Y$ – метрическое пространство, а $C(X,Y)$ – множество непрерывных




*Множество* $\Gamma_{\varphi,\varepsilon}$ *получено как* $\Psi^{-1}(W)$

отображений из $X$ в $Y$, с топологией равномерной сходимости. Предположим, что у $X$ есть счетная база окрестностей в точке. Тогда отображение эвалюоации $X \times C(X,Y) \xrightarrow{\mathsf{ev}} Y$ непрерывно. Более того, топология равномерной сходимости – самая слабая топология, в которой $\mathsf{ev}$ непрерывно.

**Замечание 11.4.** Из Теоремы 11.3 сразу следует, что топология равномерной сходимости на $C(X,Y)$ целиком определяется топологической структурой $X$ и $Y$.

**Замечание 11.5.** Напомним, что отображение топологических пространств называется **секвенциально непрерывным**, если оно переводит пределы последовательностей в пределы последовательностей. Секвенциальная непрерывность $\mathsf{ev}$ немедленно следует (проверьте) из неравенства треугольника

$$d(f_i(x_i), f(x)) \leqslant d(f_i(x_i), f(x_i)) + d(f(x_i), f(x))$$

где $\{f_i\} \in C(X,Y)$ – последовательность функций, равномерно сходящихся к $f$, а $\{x_i\} \in X$ – последовательность точек, сходящихся к $x$.

**Замечание 11.6.** Для пространств со счетной базой окрестностей в точке, секвенциальная непрерывность равносильна обычной (докажите это). Поэтому $X \times C(X,Y) \xrightarrow{\mathsf{ev}} Y$ непрерывно, в предположении, что у $X$ есть счетная база окрестностей в точке (докажите).

Мы завершим доказательство Теоремы 11.3 в конце следующей секции.

## 11.2. Топология, заданная окрестностями графика

Пусть $X$, $Y$ – топологические пространства, а $C(X,Y)$ – множество всех непрерывных отображений из $X$ в $Y$.

Пусть $W$ – подмножество в $X \times Y$. Рассмотрим множество $\mathfrak{S}_W$ в $C(X,Y)$, состоящее из всех непрерывных отображений $f \in C(X,Y)$ таких, что график $\Gamma_f$ лежит в $W$. Пусть $C'(X,Y)$ – пространство непрерывных функций, с топологией, базой которой является множество всех $\mathfrak{S}_W$, где $W$ – объединение конечного числа открытых подмножеств $U \times V \subset X \subset Y$ с подмножествами вида $K \times Y$, где $K \subset X$ замкнут.

Рассмотрим отображение $X \times C'(X,Y) \xrightarrow{\Phi} X \times Y$, переводящее $(x,\varphi)$ в $(x,\varphi(x))$. Для каждого открытого множества $U \times V \subset X \times Y$, пусть

$$W := U \times V \cup (X \backslash U) \times Y.$$

Из определения $\mathfrak{S}_W$ сразу следует, что

$$\Phi^{-1}(U \times V) = U \times \mathfrak{S}_W.$$

Действительно, для каждого $\varphi \in C(X,Y)$, образ $\varphi(U)$ лежит в $V$ тогда и только тогда, когда график $\varphi$ лежит в $W$. Следовательно, отображение $\Phi: X \times C'(X,Y) \longrightarrow X \times Y$ непрерывно. Поскольку отображение эвалюации получается как композиция $\Phi$ и проекции, мы получаем, что $X \times C'(X,Y) \xrightarrow{\mathsf{ev}} Y$ непрерывно.

По определению, база открытых множеств в $C'(X,Y)$ порождена множествами вида $\mathfrak{S}_W$, где $W = U \times V \cup (X \backslash U) \times Y$. Эта база получается из прообразов $\pi(\Phi^{-1}(A))$, где $\pi: X \times C'(X,Y) \longrightarrow C'(X,Y)$ – естественная проекция, а $A = U \times V$ открыто в $X \times Y$. Поэтому топология $C'(X,Y)$ есть слабейшая топология, в которой $\Phi$ непрерывно.

**Замечание 11.7.** Непрерывность $X \times C(X,Y) \xrightarrow{\Phi} X \times Y$ в какой-то топологии на $C(X,Y)$ равносильна непрерывности $\mathsf{ev}$ в этой же самой топологии. Действительно, $\mathsf{ev}$ получается композицией $\Phi$ и проекции, а $\Phi$ получается как произведение $\mathsf{ev}$ и проекции $X \times C(X,Y) \longrightarrow X$.

Мы получили, что $C'(X,Y)$ – слабейшая топология, в которой непрерывно отображение $\mathsf{ev}$. Для доказательства Теоремы 11.3 осталось доказать, что топология $C'(X,Y)$ эквивалентна топологии $C(X,Y)$.

Пусть $X$ – компактное топологическое пространство со счетной базой окрестностей в точке а $Y$ – метрическое пространство. Для доказательства Теоремы 11.3, рассмотрим тождественное отображение $C'(X,Y) \xrightarrow{\mathsf{Id}} C(X,Y)$. База открытых множеств в $C(X,Y)$ состоит из множеств вида $\mathfrak{S}_{\Gamma_{\varphi,\varepsilon}}$ (Замечание 11.1). Такие множества открыты в $C'(X,Y)$, по определению топологии на $C'(X,Y)$. Поэтому $C'(X,Y) \xrightarrow{\mathsf{Id}} C(X,Y)$ непрерывно, то есть топология, определенная $\mathfrak{S}_W$, сильнее, чем топология равномерной сходимости.

С другой стороны, поскольку $C'(X,Y)$ – слабейшая топология, в которой непрерывно отображение эвалюации, а $X \times C(X,Y) \xrightarrow{\mathsf{ev}} Y$ непрерывно, топология $C'(X,Y)$ слабее, чем топология $C(X,Y)$. Мы доказали, что эти топологии эквивалентны.

**Утверждение 11.8:** Пусть $Y$ – компактное метрическое пространство, $Z$ – метрическое пространство, а $X$ компактно. Тогда отображение композиции $C(X,Y)\times C(Y,Z) \xrightarrow{A} C(X,Z)$ непрерывно.

**Доказательство:** Отображение $C(X,Y)\times C(Y,Z) \xrightarrow{A} C(X,Z)$ непрерывно тогда и только тогда, когда

$$X \times C(X,Y)\times C(Y,Z) \xrightarrow{\mathsf{Id}_X \times A} X \times C(X,Z)$$

непрерывно. По Теореме 11.3, база топологии на $X\times C(X,Z)$ порождается $\mathsf{ev}^{-1}(U)$, где $U\subset Z$ – открытое множество. Поэтому для доказательства непрерывности композиции, достаточно доказать, что отображение $\mathsf{ev}^2(X\times C(X,Y)\times C(Y,Z)) \longrightarrow Z$, $(x,\varphi,\psi)\longrightarrow \psi(\varphi(x))$ непрерывно. С другой стороны, $\mathsf{ev}^2$ получается применением эвалюации два раза: первый раз $(x,\varphi,\psi)\longrightarrow(\varphi(x),\psi)$, а второй раз – $(\varphi(x),\psi)\longrightarrow\psi(\varphi(x))$, и каждая из этих эвалюаций непрерывна, что следует из Теоремы 11.3. ■

## 11.3. Замечания

Топология на $C(X,Y)$, определенная выше, является примерном **открыто-компактной топологии**, которая определена для любого локально компактного $X$ и любого (не обязательно метризуемого) $Y$. Для компактного подмножества $K \subset X$ и открытого $U \subset Y$, пусть $\mathcal{V}(K,U)$ – множество отображений, переводящих $K$ в $U$. Открыто-компактная топология (compact-open topology) на $C(X,Y)$ – топология, заданная базой $\mathcal{V}(K,U)$.

**Задача 11.9 (*).** Докажите, что открыто-компактная топология эквивалентна топологии равномерной сходимости, если $X$ компактно, а $Y$ метризуемо.

**Задача 11.10 (*).** Докажите, что отображение композиции $C(X,Y) \times C(Y,Z) \longrightarrow C(X,Z)$ непрерывно, для открыто-компактной топологии, если $X$, $Y$, $Z$ хаусдорфовы.

Ralph Hartzler Fox
(1913 - 1973)

Открыто-компактную топологию изобрел в 1945-м году Ральф Фокс, ученик Соломона Лефшеца, который был научным руководителем множества знаменитых математиков, в частности Джона Милнора и Барри Мазура.

# 12. Топология, лекция 12: Связные пространства

## 12.1. Свойства связных подмножеств

**Определение 12.1.** Пусть $M$ – топологическое пространство, а $A \subset M$ – его подмножество, которое открыто и замкнуто. Тогда $A$ называется **открыто-замкнутым** (clopen).

**Замечание 12.2.** Очевидно, $M$ и $\emptyset$ открыто-замкнуты. Если у $M$ есть открыто-замкнутое подмножество $U$, не равное $M$ и $\emptyset$, то $M$ можно разбить в объединение двух непересекающихся, непустых, открытых подмножеств, $U$ и $M \backslash U$. Обратное тоже верно (докажите).

**Определение 12.3.** Пусть $M$ – топологическое пространство, а $X \subset M$ – его подмножество, рассмотренное как топологическое пространство с индуцированной топологией. Тогда $X$ называется **связным** (connected), если верны следующие равносильные условия

**(i)** $X$ не содержит открыто-замкнутых подмножеств, кроме $X$ и $\emptyset$.

**(ii)** $X$ не может быть разбит в объединение двух непересекающихся, непустых, открытых подмножеств

**Утверждение 12.4:** Связное подмножество отрезка $[0, 1]$ – это отрезок, интервал или полуинтервал.[1]

**Доказательство:** Пусть $X \subset [0, 1]$ – подмножество, не являющееся отрезком, интервалом или полуинтервалом. Тогда в $[0, 1] \backslash X$ содержится точка $\alpha$ такая, что в $X$ есть точка $x > \alpha$ и точка $y < \alpha$. В этом случае, $X$ разбивается в объединение двух непустых, открытых подмножеств $X \cap [0, \alpha[$ и $X \cap ]\alpha, 0]$.

Чтобы доказать, что отрезок, интервал или полуинтервал $I$ связны, возьмем разбиение $I$ в объединение двух непересекающихся, открытых подмножеств $X$ и $Y$, и пусть $x \in X$ – любая точка. Для простоты, положим, что $I$ – интервал (доказательство для отрезка и полуинтервала аналогично). Пусть $I_x$ – объединение всех интервалов, лежащих в $X$ и

[1] Точка и пустое множество считаются частными случаями отрезка и интервала.

содержащих $x$. Тогда $I_x$ это интервал $]\alpha, \beta[\subset I$, причем либо $\alpha$, либо $\beta$ не является концом $I$. Пусть, к примеру, $\alpha$ это не конец $I$. Тогда $\alpha$ содержится $Y$. Поскольку $Y$ открыто, из этого должно следовать, что $Y$ содержит некоторую окрестность точки $\alpha$, но это невозможно, потому что $\alpha$ является предельной точкой $X$. ■

**Замечание 12.5.** Замыкание $\bar{Z}$ связного подмножества $Z$ всегда связно. Действительно, если $\bar{Z}$ удалось разбить в объединение непустых непересекающихся открытых подмножеств $U$ и $V$, $U \cap Z$ и $V \cap Z$ открыты и не пересекаются. Поскольку $Z$ плотно в $\bar{Z}$, эти множества непусты (докажите).

**Замечание 12.6.** Пусть $X$ связно, а $f: X \longrightarrow Y$ – непрерывное отображение. Тогда $f(Y)$ связно. Действительно, если $f(Y)$ разбито в объединение непустых непересекающихся открытых подмножеств, их прообразы – непересекающиеся открытые подмножества $Y$

**Следствие 12.7:** Если $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция на связном множестве то $f(X)$ это отрезок, интервал или полуинтервал. В частности, $f$ принимает все промежуточные значения между $f(x_1)$ и $f(x_2)$.

Понятие связности изучали многие математики в XIX веке, но математически строгое определение связного множества первым ввел Анри Пуанкаре.

## 12.2. Компоненты связности

**Замечание 12.8.** Пусть $X$ и $Y$ – два пересекающихся связных подмножества топологического пространства $M$. Тогда $X \cup Y$ тоже связно (докажите это).

**Определение 12.9.** Пусть $x \in M$ – точка топологического пространства, а $A_x$ – объединение всех связных подмножеств $M$, содержащих $x$. В силу вышесказанного, $A_x$ связно. Множество $A_x$ называется **компонентой связности** точки $x$.

**Замечание 12.10.** Каждое топологическое пространство является непересекающимся объединением своих компонент связности.

Jules Henri Poincaré
(1854 - 1912)

**Замечание 12.11.** Если $M$ представлено в виде объединения непустых, непересекающихся открытых подмножеств $U$ и $V$, каждая компонента связности $M$ содержится целиком в $U$ или в $V$ (докажите).

Напомним, что непрерывное отображение называется **открытым**, если оно переводит открытые множества в открытые.

**Замечание 12.12.** Пусть $f : X \longrightarrow Y$ – открытое отображение со связными слоями. Предположим, что $X$ представлено в виде объединения непустых, непересекающихся открытых подмножеств $U$ и $V$. Поскольку слои $f$ связны, подмножества $U$ и $V$ содержат каждый слой целиком. Поэтому $U = f^{-1}(U_1)$, $V = f^{-1}(V_1)$, причем $U_1$ и $V_1$ не пересекаются. Поскольку $f$ открыто, $U_1$ и $V_1$ открыты и непусты.

**Следствие 12.13:** Пусть $f : X \longrightarrow Y$ – открытое отображение со связными слоями, и $Y$ связно. Тогда $X$ связно. ■

**Замечание 12.14.** Из этого следует, что произведение связных пространств $X$ и $Y$ связно. Действительно, отображение проекции $\pi$ : $X \times Y$ открыто (докажите) и имеет связные слои.

**Замечание 12.15.** Если $f: X \longrightarrow Y$ не открыто, то связность $X$ не вытекает из связности $Y$ и слоев $f$. В качестве примера, рассмотрим естественное отображение из $\mathbb{R}$ с дискретной топологией в $\mathbb{R}$ с обычной топологией. Слои этого отображения – точки, образ связен, но $\mathbb{R}$ с дискретной топологией, очевидно, несвязно.

**Замечание 12.16.** Компоненты связности топологического пространства замкнуты, потому что замыкание связного множества связно.

**Определение 12.17.** Топологическое пространство называется **вполне несвязным**, если все его связные подмножества – точки.

**Утверждение 12.18:** Пусть $M$ – хаусдорфово топологическое пространство, у которого есть база топологии, состоящая из открыто-замкнутых множеств. Тогда $M$ вполне несвязно.

**Доказательство:** Пусть $m \in M$. В силу хаусдорфовости, у каждой точки $m_1 \neq m$ есть открытозамкнутая окрестность, не содержащая $m$. Поэтому $\{m\}$ – пересечение открыто-замкнутых множеств, $\{m\} = \bigcap U_\alpha$. Любое связное подмножество $Z \subset M$, содержащее $m$, содержится в каждом из этих открыто-замкнутых множеств целиком (докажите). Поэтому $Z \subset \bigcap U_\alpha = \{m\}$. ■

**Следствие 12.19:** Пространство $\mathbb{Z}_p$ $p$-адических чисел вполне несвязно. Действительно, каждый открытый шар в $\mathbb{Z}_p$ замкнут (докажите это).

**Задача 12.20.** Все ли открытые подмножества $\mathbb{Z}_p$ открытозамкнуты?

**Замечание 12.21.** Пусть $M$ – топологическое пространство, а $f: M \longrightarrow X$ – произвольное отображение. Рассмотрим на $X$ такую топологию: $U \subset X$ открыто, если $f^{-1}(U)$ открыто. Это сильнейшая топология на $X$ такая, что $f$ непрерывно.

**Определение 12.22.** Пусть $M$ – топологическое пространство, а $\underline{M}$ – множество компонент связности $M$. Рассмотрим на $\underline{M}$ сильнейшую топологию, в которой естественная проекция $\pi: M \longrightarrow \underline{M}$ непрерывна. Тогда $\underline{M}$ называется **пространством компонент связности** $M$.

## 12.3. Линейная связность

**Определение 12.23.** Пространство $M$ называется **линейно связным**, если для любых двух точек $x, y \in M$ найдется непрерывное отображение $\gamma: [0,1] \longrightarrow M$ такое, что $x$ и $y$ лежат в образе $\gamma$.

**Замечание 12.24.** Из линейной связности следует связность. Действительно, отрезок $[0,1]$ связен, образ связного множества связен, объединение пересекающихся связных множеств связно, и поэтому линейно связное пространство состоит из одной-единственной компоненты связности.

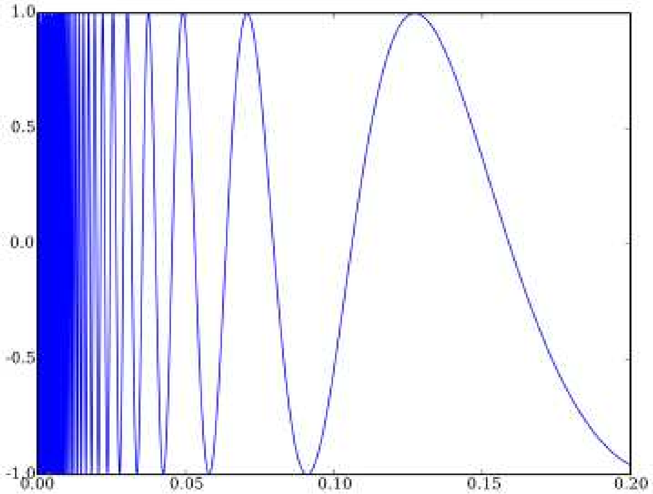



График $f(x) = \sin(1/x)$

Рассмотрим график $\Gamma_f$ отображения $f(x) = \sin(1/x)$,

$$f: ]0,1] \longrightarrow [-1,1].$$

Это множество незамкнуто; легко видеть, что его замыканием $\bar{\Gamma}_f$ будет объединение $\Gamma_f$ и отрезка $\{0\} \times [-1,1]$.

Пространство $\Gamma_f$ гомеоморфно полуинтервалу $]0,1]$ (гомеоморфизм задается проекцией на ось абсцисс). Поэтому $\bar{\Gamma}_f$ тоже связно, как замыкание связного множества.

**Утверждение 12.25:** Построенное таким образом множество $\bar{\Gamma}_f$ не является линейно связным.

**Доказательство:** Пусть $\gamma : [0,1] \longrightarrow \bar{\Gamma}_f$ – отображение из отрезка, образ которого не лежит целиком в $\{0\} \times [-1,1]$. Докажем, что образ $\gamma$ не пересекает $\{0\} \times [-1,1]$. Пусть $U \subset [0,1]$ – открытое множество, полученное как $\gamma^{-1}(\Gamma_f)$, $U_0$ – какая-то компонента связности $U$, $\bar{U}_0$ – ее замыкание, а $Z = \gamma(\bar{U}_0)$. Предположим, что $Z$ пересекает $\{0\} \times [-1,1]$ (в противном случае $\gamma([0,1])$ лежит в $\Gamma_f$, и мы все доказали).

**Шаг 1:** Поскольку $\bar{U}_0$ компактно, $Z$ тоже компактно, а следовательно замкнуто.

**Шаг 2:** Поскольку замыкание $\gamma(U_0)$ пересекает $\{0\} \times [-1,1]$, оно не содержится в $\Gamma_f$. Следовательно, $\gamma(U_0)$ содержит подмножество вида

$$\{(\alpha, \sin(1/\alpha)) \mid 0 < \alpha < c\},$$

и его замыкание $Z$ содержит отрезок $\{0\} \times [-1,1]$ целиком.

**Шаг 3:** Поскольку $Z \backslash \gamma(U_0)$ содержит $\{0\} \times [-1,1]$, образ $\gamma(\bar{U}_0 \backslash U_0)$ содержит отрезок $\{0\} \times [-1,1]$. Но это невозможно, потому что множество $\bar{U}_0 \backslash U_0$ конечно. ■